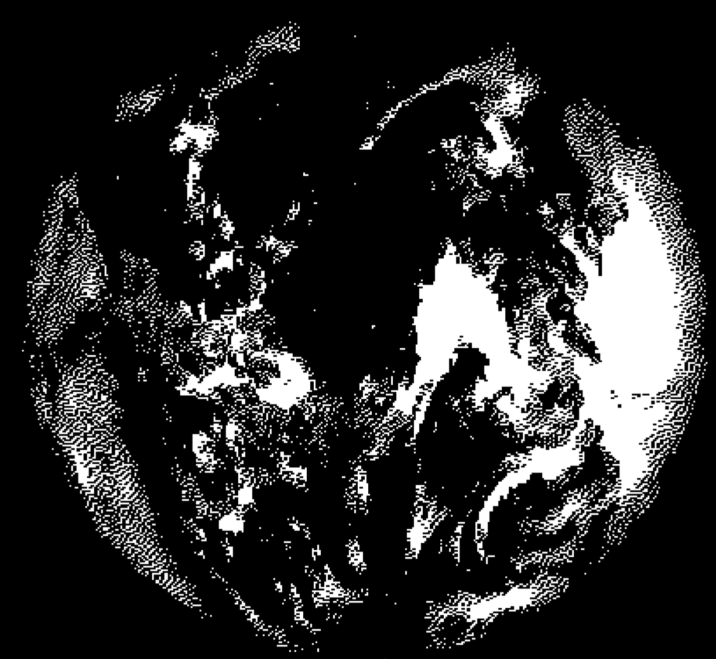




المرجع الشامل

فى حل

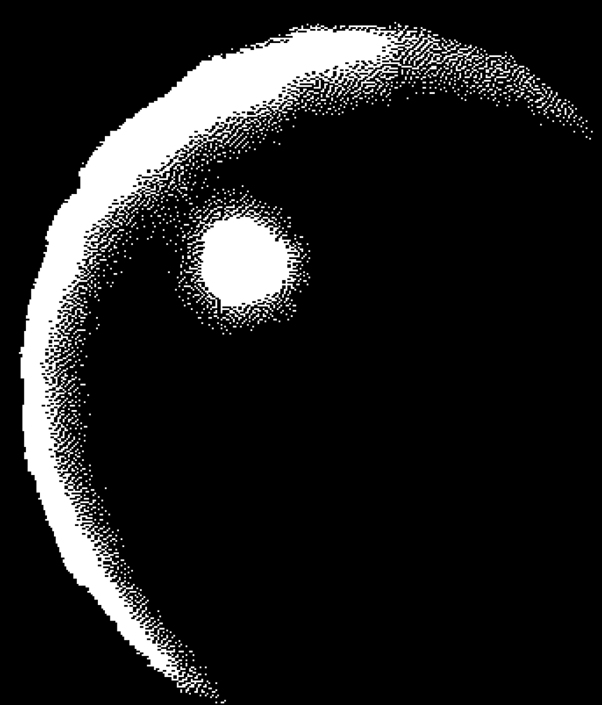
مسائل التكامل



دكتور

السيد نصر

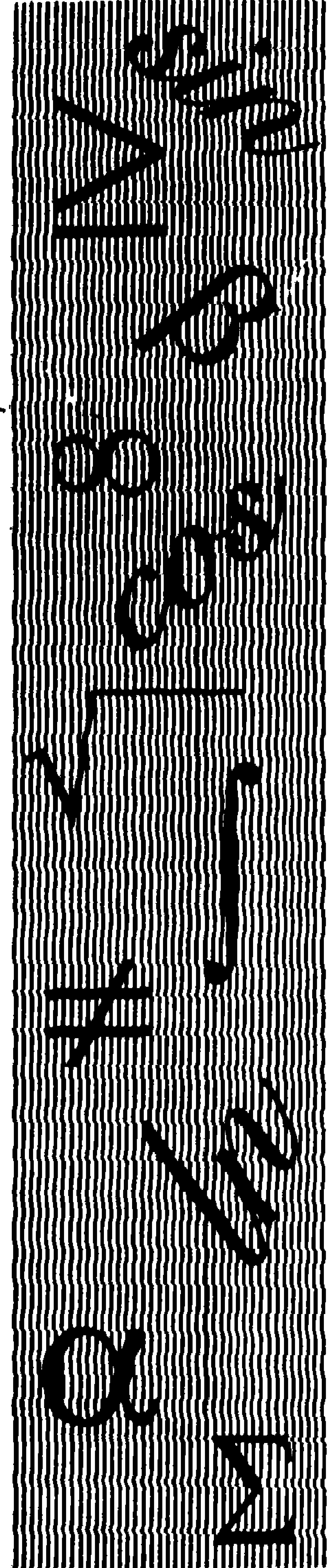




إيتراك

للطباعة والنشر والتوزيع

دكتور
السيد نصر



المرجع الشامل

في حل مسائل التكامل

حقوق النشر	رقم الإيداع
الطبعة الأولى ٢٠٠١	٢٠٠١/١١١٠٢
جميع الحقوق محفوظة للناشر	الترقيم الدولى .I.S.B.N
	977-5723-44-2

ايتــــراك للنشـــر والتـــوزيع

طريق غرب مطار الماظة عمارة (١٢) شقة (٢) ص.ب : ٥٦٦٢

هليوبوليس غرب – مصر الجديدة

القاهرة ت : ٤١٧٢٧٤٩ فاكس : ٤١٧٢٧٤٩

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهـــداء

إلى ابنـتي ... سالى

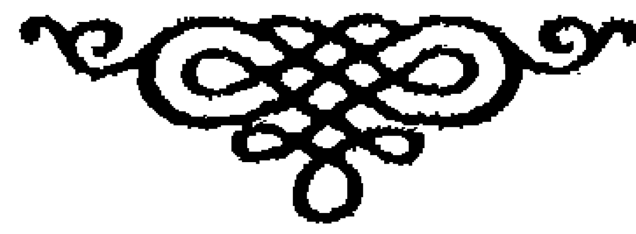
إلى ابني ... أحمـــد

لهما مني كل الحب والتقدير

دكتور

السيد نصر

الفهـــرس



تقـديم

إننـا لنتجـه إلى الله ـ عــز وجـل ـ بـأجمل الشـكر وأعمقـه ، وأعظـم الحمـد وأصدقـه، ونثـني عليـه الثنـاء كلـه ... ففضلـه علينـا كبير، وحاجتنـا إليـه دائمـة، تؤكدها في قلوبنا عبوديتنا المحبة الجميلة، لألوهيته الرحيمة الجليلة.

ومهما اتجهنا إليه بالحمد ذاكرين، ووقفنـا في رحابـه شاكرين فلـن يكـون إلا جهد المقل العاجز أمام فيض المنعم الوهاب.

وبعد، فقد قُدّر لي ـ عزيزي القارئ ـ أن أكون أحد العاشقين لعلم الرياضيـات، ولأنـني عاشـق لها وكثيرون يكرهونـها، سـألت نفسـي كثـيرًا: لمـاذا الكثـير الكثـير يكرهونـها؟ وصراحـة أجيبُكَ أنـني وجـدت أن العيـب ليـس في الرياضيـات؛ وإنمـا العيبُ عيب عشاقها والعـاملين معـها وبها، فكثيرون منـهم إن لم يكـن معظمـهم يعتقدون ـ بقصد أو بدون قصـد ـ أن عقـول الآخريـن مثـل عقولهم، وأن الآخريـن قادرين مثلهم، على الاستنباط والاستدلال والاسـتنتاج، فإن تحدثـوا عنها ـ أقصـد عن الرياضيات ـ تحدثوا عنها بغمـوض حتـى صار الغمـوض وعـدم الوضـوح صفـة للرياضيات وهي من هذه التهمة براء.

والرياضيات سواء أحببناها أو كرهناها، سواء عشقناها أو بغضناهـا فهي أولاً وأخـيرًا (الملكة)، ملكـة العلـوم جميعـها، ولأن للملكـة تـاج، فـإن (علـم التفـاضل والتكامل) هو تاج هذه الملكة، ليكون (التكامل) هو لؤلـؤة هـذا التـاج. ولأن التكـامل كما يُجمع الكثيرون سواء مـن عشاق الرياضيـات أو كارهوهـا، على أنـه مـن أصعب فروع الرياضيات عامة، فكان هذا الكتاب الذي بـين يديـك ـ عزيـزي القارئ ـ وهـو محاولة متواضعة وغير مسـبوقة لتقديـم الحـل لعـدد ٢٥٢ حالـة عامـة مـن مسائل التكامل، ولقـد روعـي عـرض المـادة الرياضياتيـة في الكتـاب بأسلوب يتيـح للقارئ تتبع خطوات الحل في معنى واضح بعيد عن الغمـوض، ولقـد تطلـب ذلـك تبسـيط

وتحليل كل حل مع ذكر كافة المفاهيم والمتطابقات والقوانين المستخدمة في كل حل على حدة دون إخلال بدقة الحل.

وإني لمؤمن ـ عزيزي القارئ ـ بأن ما قدمت إليك فيه بعض النفع، ولن ألجأ في مقدمتي هذه إلى تقييم عملي وجهدي من خلال سرد لمزاياه ولكني تركت ذلك لك راجيًا أن يلقى لديك بعض الرضا وحسن القبول. وإني لأرحب بكل يد أمينة مخلصة لتبصرني بالعيب ونواحي القصور، وإن كانت كلمة ثناء فهي خير مقابل أرجوه وأعز وأرفع وسام أضعه على صدري.

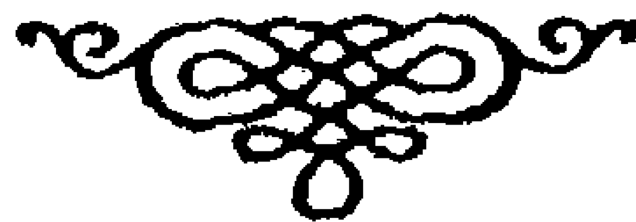
ولا يسعني بعد أن وفقني الله سبحانه وتعالى إلى إخراج كتابي هذا، وقبل أن أدع القلم إلا أن أقدم عظيم شكري وخالص تمنياتي إلى كل من علمني علمًا قصد به وجه رب كريم. وإن كان تقديم الشكر لأهله واجب فإن الاعتراف بالفضل وسداد الدين أوجب، فلزوجتي كثير من الفضل في صبر تحملته بنفس راضية خلال فترة انقطاعي وتفرغي لإتمام هذا العمل فلها من الشكر الكثير، ومن الاعتراف بالفضل ما يطوق عنقي، ولئن كنت عاجزًا عن شكرها فعند الله خير الجزاء إنه نعم المولى ونعم النصير.

دكتور

السيد نصر

2000/12/4

Tel : 012 290 79 88
Tel & Fax : 013 240 848



كيف تستخدم هذا الكتاب

بالتأكيد عزيزي القارئ، صادفتك مجموعة مسائل مثل هذه:

$(i)\ \int \frac{x}{2x+3}dx \quad , \quad (ii)\ \int \frac{x}{5x+6}dx \quad , \quad (ii)\ \int \frac{x}{7x-19}dx$

وبملاحظة بسيطة نجد أن جميع التكاملات السابقة على الصورة:

$$\int \frac{x}{ax+b}dx \qquad .....(*)$$

فإذا تعلمنا كيفية إيجاد قيمة التكامل (*) فإن ذلك يكون درسًا مفيدًا لإيجاد قيم التكاملات السابقة وجميع التكاملات على شاكلته. لهذا السبب كان هذا الكتاب.

بالنسبة لكيفية استخدام هذا الكتاب، فإن استخدامه أقرب ما يكون إلى استخدام المعاجم وحتى يتضح لنا هذا نقدم مجموعة الحالات التالية:

- إذا صادفتك مسألة مثل: $\int x\ ln7x\ dx$ فابحث عنها في فهرس الكتاب في مجموعة الدوال اللوغاريتمية على الصورة $\int x\ ln\,ax\ dx$ ستجدها تحت رقم *(65)* وعلى اليمين يدلك الفهرس على أنها في صفحة *108* وعند دراستك للعلاقة *(65)* تكون قد تعلمت كيفية إيجاد قيم جميع التكاملات التي على الصورة: $\int x\ ln\,ax\ dx$ مثل $\int x\ ln7x\ dx$ وغيرها.

- لنفترض أنك تريد إيجاد قيمة التكاملات:

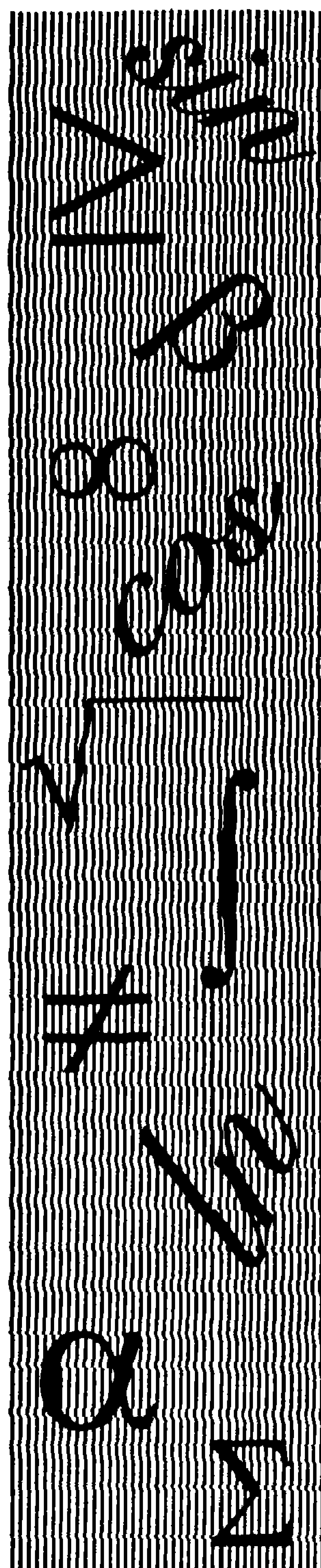
$$\int \frac{1}{x^2(3x+7)}dx \quad , \quad \int \frac{1}{x^2(2x-5)}dx \quad , \quad \int \frac{1}{x^2(x+1)}dx$$

يكفي أن تتعلم كيفية إيجاد قيمة التكامل $\int \frac{1}{x^2(ax+b)}dx$ فابحث عنه في تكاملات تحتوي على $(ax+b)$ ستجده تحت رقم *(136)* وفي صفحة *200*.

وهكذا ، تستطيع باستخدامك لهذا الكتاب التعرف على طريقة إيجاد قيمة التكامل لعدد ٢٥٢ حالة قياسية.

نسأل الله أن ينفعك به وأن يجعله في ميزان حسناتي يوم العرض عليه. اللهم تقبل يارب العالمين.





سـرد
الصيغ العـامة
المحلولة بالكتاب

سرد الصيغ العامة المحلولة بالكتاب وأرقام صفحاتها

صيغتان أساسيتان :

1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	حيث $f'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة الى x	39
2	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$		39

تكاملات الدوال المثلثية :

3	$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$	40
4	$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$	41
5	$\int \sin^n ax\, dx = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx$	42
6	$\int x \sin ax\, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} + C$	44
7	$\int x^n \sin ax\, dx = \frac{-x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$	45
8	$\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\sin ax}{x^{n-1}} - a\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx\right\}$; $n > 1$	45
9	$\int \frac{1}{1+\sin ax}dx = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$	46
10	$\int \frac{1}{1-\sin ax}dx = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$	49
11	$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$	52
12	$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$	52
13	$\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$	53

14	$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C$	55
15	$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$	56
16	$\int \frac{\cos ax}{x^n}dx = \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\cos ax}{x^{n-1}} + a\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx\right\}$; $n>1$	57
17	$\int \frac{1}{1+\cos ax}dx = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$	58
18	$\int \frac{1}{1-\cos ax}dx = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$	59
19	$\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sec ax\right| + C$	60
20	$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$	61
21	$\int \tan^n ax\,dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\,dx$; $n>1$	62
22	$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sin ax\right| + C$	63
23	$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$	63
24	$\int \cot^n ax\,dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\,dx$; $n>1$	64
25	$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sec ax + \tan ax\right| + C$ .... (i) $= \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right| + C$ .... (ii)	65
26	$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$	67
27	$\int \sec^n ax\,dx = \frac{\sec^{n-2} ax\tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\,dx$; $n>1$	68
28	$\int \csc ax\,dx = \frac{-1}{a}\ln\left|\csc ax + \cot ax\right| + C$ .... (i) $= \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + C$ .... (ii)	69

29	$\int cosec^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$	71
30	$\int cosec^n ax\, dx = -\frac{cosec^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2} ax\, dx \ ; \ n > 1$	72
31	$\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax + C$ $= -\frac{1}{4a}\cos 2ax + C$	74
32	$\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C \ ; \ a^2 \neq b^2$	75
33	$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C \ ; \ a^2 \neq b^2$	76
34	$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C \ ; \ a^2 \neq b^2$	77
35	$\int \sin^n ax \cos ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \ ; \ n \neq -1$	78
36	$\int \cos^n ax \sin ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \ ; \ n \neq -1$	79
37	$\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C \ ; \ n \neq 0$	80
38	$\int cosec^n ax \cot ax\, dx = -\frac{cosec^n ax}{na} + C \ ; \ n \neq 0$	80
39	if $m \neq -n$ $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\, dx$	81
40	if $n \neq -m$ $\int \sin^n ax \cos^m ax\, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\, dx$	83

تكاملات الدوال المثلثية العكسية :

41	$\int \sin^{-1} ax\,dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C \;;\; a^2x^2 \le 1$	85
42	$\int \cos^{-1} ax\,dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C \;;\; a^2x^2 \le 1$	86
43	$\int \tan^{-1} ax\,dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln\left(1+a^2x^2\right) + C$	87
44	$\int \cot^{-1} ax\,dx = x\cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(1+a^2x^2\right) + C$	89
45	$\int \sec^{-1} ax\,dx = x\sec^{-1} ax - \frac{1}{a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-1}\right\rvert + C$	90
46	$\int \operatorname{cosec}^{-1} ax\,dx = x\operatorname{cosec}^{-1} ax + \frac{1}{a}\ln\left\lvert ax + \sqrt{a^2x^2-1}\right\rvert + C$	91
47	$\int x^n \sin^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \;;\; n \ne -1$	92
48	$\int x^n \cos^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \;;\; n \ne -1$	93
49	$\int x^n \tan^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx \;;\; n \ne -1$	94
50	$\int x^n \cot^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cot^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx \;;\; n \ne -1$	95
51	$\int x^n \sec^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} ax - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}\,dx$ $;n \ne -1$	96
52	$\int x^n \operatorname{cosec}^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{cosec}^{-1} ax + \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx$ $;n \ne -1$	97

تكاملات الدوال الأسية واللوغاريتمية :

53	$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \quad , \; a \ne 0$	98
54	$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C \quad , \; a \ne 0$	98

55	$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}dx \quad , \; a \neq 0$	99
56	$\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C \; ; \; b > 0 \, , b \neq 1$	100
57	$\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1} b^{ax}\,dx \qquad ; \; b > 0, b \neq 1$	101
58	$\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x + C$	102
59	$\int (\ln ax)^n dx = x(\ln ax)^n - n\int (\ln ax)^{n-1}dx$	102
60	$\int \frac{\ln ax}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C$	103
61	$\int \frac{(\ln ax)^n}{x}dx = \frac{(\ln ax)^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$	105
62	$\int \frac{(\ln ax)^n}{x^m}dx = -\frac{1}{m-1}\left\{\frac{(\ln ax)^n}{x^{m-1}} - n\int \frac{(\ln ax)^{n-1}}{x^m}dx\right\} \quad ; \; m \neq 1$	105
63	$\int \frac{1}{x \ln ax}dx = \ln\left\| \ln ax \right\| + C$	107
64	$\int \frac{1}{x(\ln ax)^n}dx = \frac{-1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}} + C \qquad ; \; n \neq 1$	107
65	$\int x \ln ax\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln ax - \frac{1}{4}x^2 + C$	108
66	$\int x^n \ln ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \; ; \; n \neq -1$	109
67	$\int x^m (\ln ax)^n dx = \frac{1}{m+1}\left\{ x^{m+1}(\ln ax)^n - n\int x^m (\ln ax)^{n-1}dx\right\}$ $; m \neq -1$	110
68	$\int \frac{x^m}{(\ln ax)^n}dx = \frac{-1}{n-1}\left\{\frac{x^{m+1}}{(\ln ax)^{n-1}} - (m+1)\int \frac{x^m}{(\ln ax)^{n-1}}dx\right\}$ $; \; n \neq 1$	111
69	$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin bx - b\cos bx\} + C \qquad ; a \neq 0, b \neq 0$	113
70	$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos bx + b\sin bx\} + C \qquad ; a \neq 0, b \neq 0$	115

تكاملات الدوال الزائدية :

71	$\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$	117
72	$\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$	117
73	$\int \sinh^n ax\,dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,dx \; ; n \neq 0$	118
74	$\int x \sinh ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$	120
75	$\int x^n \sinh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$	121
76	$\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right\} + C$	122
77	$\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$	124
78	$\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$	125
79	$\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx \; ; n \neq 0$	125
80	$\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$	127
81	$\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,dx$	128
82	$\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right\} + C$	129
83	$\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$	131
84	$\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$	132

85	$\int \tanh^n ax\,dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx \quad ; \ n \neq 1$	133
86	$\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left\|\sinh ax\right\| + C$	134
87	$\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$	135
88	$\int \coth^n ax\,dx = \frac{-\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-2} ax\,dx \ ; \ n \neq 1$	135
89	$\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\sinh ax) + C$ $= \frac{2}{a}\tan^{-1}(e^{ax}) + C$	136
90	$\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$	138
91	$\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} +$ $\frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx \ ; \ n \neq 1$	139
92	$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C \quad ; \ n \neq 0$	140
93	$\int \operatorname{cosech} ax\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\ln\left\|\tanh\frac{ax}{2}\right\| + C & \text{.......................(i)} \\ \frac{1}{a}\ln\left\|\operatorname{cosech} ax - \coth ax\right\| + C & \text{...(ii)} \end{cases}$	141
94	$\int \operatorname{cosech}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$	143
95	$\int \operatorname{cosech}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{cosech}^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)} -$ $\frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosech}^{n-2} ax\,dx \ ; \ n \neq 1$	143
96	$\int \operatorname{cosech}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{cosech}^n ax}{na} + C \quad ; \ n \neq 0$	145
97	$\int \sinh ax \cosh ax\,dx = \frac{\cosh 2ax}{4a} + C$	146

98	$\int \sinh ax \sinh bx \, dx = \frac{1}{a^2-b^2}\{a \sinh bx \cosh ax - b \sinh ax \cosh bx\} + C \;\; ; \;\; a^2 \neq b^2$	147
99	$\int \cosh ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2-b^2}\{a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax\} + C \;\; ; \;\; a^2 \neq b^2$	149
100	$\int \sinh ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2-b^2}\{a \cosh ax \cosh bx - b \sinh ax \sinh bx\} + C \;\; ; \;\; a^2 \neq b^2$	151
101	$\int \sinh ax \sin ax \, dx = \frac{1}{2a}\{\cosh ax \sin ax - \sinh ax \cos ax\} + C$	153
102	$\int \sinh ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a}\{\cosh ax \cos ax + \sinh ax \sin ax\} + C$	154
103	$\int \cosh ax \sin ax \, dx = \frac{1}{2a}\{\sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax\} + C$	156
104	$\int \cosh ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a}\{\sinh ax \cos ax + \cosh ax \sin ax\} + C$	158
105	$\int \sinh^n ax \cosh ax \, dx = \frac{\sinh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C$	160
106	$\int \cosh^n ax \sinh ax \, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C$	161
107	$\int \sinh^n ax \cosh^m ax \, dx = \frac{\cosh^{m-1} ax \sinh^{n+1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sinh^n ax \cosh^{m-2} ax \, dx \;\; ; \;\; m \neq -n$	161
108	$\int \sinh^n ax \cosh^m ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax}{a(n+m)} - \frac{n-1}{n+m}\int \sinh^{n-2} ax \cosh^m ax \, dx \;\; ; \;\; n \neq -m$	164

تكاملات الدوال الزائدية العكسية :

109	$\int \sinh^{-1} ax\,dx = x\sinh^{-1} ax - \frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a} + C$	166
110	$\int x\sinh^{-1} ax\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4a^2}\right)\sinh^{-1} ax - \frac{x\sqrt{1+a^2x^2}}{4a} + C$	167
111	$\int x^n \sinh^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}\sinh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n\sqrt{1+a^2x^2}}{a(n+1)} + \frac{n}{a(n+1)}\int x^{n-1}\sqrt{1+a^2x^2}\,dx$	169
112	$\int \cosh^{-1} ax\,dx = x\cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + C$	170
113	$\int x\cosh^{-1} ax\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4a^2}\right)\cosh^{-1} ax - \frac{x\sqrt{a^2x^2-1}}{4a} + C$	171
114	$\int x^n \cosh^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}\cosh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2+1}}{a(n+1)} + \frac{n}{a(n+1)}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\,dx$	173
115	$\int \tanh^{-1} ax\,dx = x\tanh^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left|1-a^2x^2\right| + C \quad ; \ |x|<1$	174
116	$\int x\tanh^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\tanh^{-1} ax + \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$	175
117	$\int x^n \tanh^{-1} ax\,dx = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\tanh^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(1-a^2x^2\right) - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(1-a^2x^2\right)dx\right\}$	177
118	$\int \coth^{-1} ax\,dx = x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2-1\right) + C$	179
119	$\int x\coth^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\coth^{-1} ax + \frac{x}{2a} + \frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right| + C$	180

120	$\int x^n \coth^{-1} ax\,dx = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n \ln\left(a^2x^2-1\right) - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(a^2x^2-1\right)dx\right\}$	181
121	$\int \operatorname{sech}^{-1} ax\,dx = x\operatorname{sech}^{-1} ax + \frac{1}{a}\sin^{-1} ax + C$	183
122	$\int x\operatorname{sech}^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1} ax - \frac{1}{2a^2}\sqrt{1-a^2x^2} + C$	184
123	$\int x^n \operatorname{sech}^{-1} ax\,dx = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{sech}^{-1} ax + \int \frac{x^n}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\right\}$	185
124	$\int \operatorname{cosech}^{-1} ax\,dx = x\operatorname{cosech}^{-1} ax + \frac{1}{a}\ln\left\lvert ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right\rvert + C$	186
125	$\int x\operatorname{cosech}^{-1} ax\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{cosech}^{-1} ax + \frac{1}{2a^2}\sqrt{1+a^2x^2} + C$	187
126	$\int x^n \operatorname{cosech}^{-1} ax\,dx = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{cosech}^{-1} ax + \frac{1}{a^2}x^{n-1}\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{n-1}{a^2}\int x^{n-2}\sqrt{1+a^2x^2}\,dx\right\}$	188

تكاملات تحتوي على $\sqrt{ax+b}$, $(ax+b)$:

127	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad ; \; n \neq -1$	190
128	$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left\{\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right\} + C \; ; \; n \neq -1,-2$	191
129	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$	192
130	$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln\lvert ax+b\rvert + C$	192
131	$\int \frac{x^2}{ax+b}dx = \frac{1}{a^3}\left\{\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln\lvert ax+b\rvert\right\} + C$	194

132	$\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^2}\left\{ln\mid ax+b\mid + \frac{b}{ax+b}\right\}+C$	195
133	$\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}ln\mid ax+b\mid + C$	196
134	$\int \frac{1}{x\,(ax+b)}dx = \frac{1}{b}ln\left\lvert \frac{x}{ax+b}\right\rvert + C \qquad ;\ b \neq 0$	197
135	$\int \frac{1}{x\,(ax+b)^2}dx = \frac{1}{b\,(ax+b)} + \frac{1}{b^2}ln\left\lvert \frac{x}{ax+b}\right\rvert + C \qquad ;\ b \neq 0$	198
136	$\int \frac{1}{x^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}ln\left\lvert \frac{ax+b}{x}\right\rvert + C \qquad ;\ b \neq 0$	200
137	$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx = \frac{1}{(ad-bc)}ln\left\lvert \frac{ax+b}{cx+d}\right\rvert + C\ ;\ (ad-bc) \neq 0$	202
138	$\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}dx = \frac{1}{(ad-bc)}\left\{-\frac{b}{a}ln\mid ax+b\mid + \frac{d}{c}ln\mid cx+d\mid\right\} + C\ ;\ (ad-bc) \neq 0$	204
139	$\int \frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}dx = \frac{1}{(ad-bc)}\left\{\frac{-1}{ax+b} - \frac{c}{(ad-bc)}ln\left\lvert \frac{ax+b}{cx+d}\right\rvert\right\} + C\ ;\ ad-bc \neq 0$	205
140	$\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}dx = \frac{1}{(ad-bc)}\left\{\frac{b}{a\,(ax+b)} + \frac{d}{(ad-bc)}ln\left\lvert \frac{ax+b}{cx+d}\right\rvert\right\} + C\ ;\ ad-bc \neq 0$	207
141	$\int x\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\ (ax+b)^{3/2} + C$	210
142	$\int x^2\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2}{a^3}\left\{\frac{(ax+b)^{7/2}}{7} - \frac{2b(ax+b)^{5/2}}{5} + \frac{b^2(ax+b)^{3/2}}{3}\right\} + C$	211
143	$\int x^n\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2x^n(ax+b)^{3/2}}{a\,(2n+3)} - \frac{2bn}{a\,(2n+3)}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\ dx$	212

144	$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & ;\ b<0 \quad (i) \\ \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right\rvert+C & ;\ b>0 \quad (ii) \end{cases}$	213
145	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = \begin{cases} 2\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right\rvert+C & ;b>0\ (i) \\ 2\sqrt{ax+b}-\sqrt{-b}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & ;b<0\ (ii) \end{cases}$	215
146	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx$	216
147	$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C \qquad ;\ a\neq 0$	217
148	$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}\left(3a^2x^2-4abx+8b^2\right)\sqrt{ax+b}+C \ ;\ a\neq 0$	218
149	$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)}-\frac{2bn}{a(2n+1)}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad ;\ a\neq 0$	219
150	$\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \frac{2}{a}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2}+C \quad ;\ n\neq -2 \qquad ;\ a\neq 0$	220

تكاملات تحتوي على $\sqrt{2ax-x^2}$:

151	$\int \sqrt{2ax-x^2}dx = \frac{(x-a)}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \ ;a>0$	221
152	$\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n dx =$ $\frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}{n+1}+\frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}dx$ $;a>0,\ n\neq -1$	222
153	$\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \qquad ;\ a>0$	225

154	$\int \frac{1}{\left(2ax-x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C \quad ; a>0 \qquad ; a>0$	227
155	$\int \frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2}+$ $\frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}}dx \qquad ; a>0\ , n\neq 2$	228
156	$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx =$ $\frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6}+\frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \qquad ; a>0$	231
157	$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}+C \qquad ; a>0$	233
158	$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2}+a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \qquad ; a>0$	235
159	$\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)-\sqrt{2ax-x^2}+C \qquad ; a>0$	237
160	$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}}-\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \qquad ; a>0$	238
161	$\int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = \frac{3a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)-$ $\frac{(x+3a)}{2}\sqrt{2ax-x^2}+C \qquad ; a>0$	241

تكاملات تحتوي على $\sqrt{a^2+x^2}$, $\left(a^2+x^2\right)$:

$; \ a\neq 0$

162	$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad a\neq 0$	242
163	$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left\|a^2+x^2\right\|+C$	243
164	$\int \frac{1}{x\left(a^2+x^2\right)}dx = \frac{1}{[illegible]}$ [illegible] $\left\|\frac{x^2}{a^2+x^2}\right\|+C$	244

165	$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx=\frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad ;a\neq 0$	247
166	$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx \quad ;a\neq 0,\ n>1$	248
167	$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$	250
168	$\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}+C$	251
169	$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x\left(a^2+2x^2\right)\sqrt{a^2+x^2}}{8}-\frac{a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$	252
170	$\int x^n\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}-\frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}dx \quad ;\ n\neq -2$	254
171	$\int \left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx=\frac{x}{8}\left(2x^2+5a^2\right)\sqrt{a^2+x^2}+\frac{3a^4}{8}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$	256
172	$\int x\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{5}\left(a^2+x^2\right)^{5/2}+C$	258
173	$\int \frac{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}{x}dx=\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}+a^2\sqrt{a^2+x^2}-a^3\ln\left\lvert\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x}\right\rvert+C$	259
174	$\int x^n\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}-\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad ;\ n\neq -1$	261
175	$\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx=\frac{1}{n+1}x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n+\frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2}dx$	262

176	$\int x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx = \dfrac{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C$	263
177	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert + C$	264
178	$\int \dfrac{1}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n}dx = \dfrac{x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)}+ \dfrac{n-3}{(n-2)a^2}\int \dfrac{1}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2}}dx \quad ; n\neq 2$	265
179	$\int \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sqrt{a^2+x^2}+C$	267
180	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\dfrac{1}{a}ln\left\lvert \dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right\rvert + C$	268
181	$\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\dfrac{a^2}{2}sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+C$	270
182	$\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$	271
183	$\int \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\,sinh^{-1}\left\lvert\dfrac{a}{x}\right\rvert + C$	272
184	$\int \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx = sinh^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C$	274
185	$\int \dfrac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$	275
186	$\int \dfrac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$	276
187	$\int \dfrac{1}{x\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = \dfrac{1}{a^2}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int \dfrac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx\right\}$	278
188	$\int \dfrac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)+C$	279

189	$\int \frac{1}{x^2(a^2+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}+C$	280
190	$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{5/2}}dx = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right\}+C$	282
191	$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{5/2}}dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}+C$	284
192	$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}}dx = \frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{(a^2+x^2)^{3/2}}+C$	285

تكاملات تحتوي على $\sqrt{x^2-a^2}$, (x^2-a^2):

193	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$	287
194	$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2-a^2\right\|+C$	289
195	$\int \frac{1}{x(x^2-a^2)}dx = \frac{1}{2a^2}\ln\left\|\frac{x^2-a^2}{x^2}\right\|+C$	289
196	$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad ;\|x\|>\|a\|$	291
197	$\int x\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2}+C$	292
198	$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$	293
199	$\int x^n\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{n+2}x^{n-1}(x^2-a^2)^{3/2}+$ $\frac{a^2(n-1)}{(n+2)}\int x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}dx \qquad ;\ n\neq -2$	295

200	$\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8} ln\left\| x+\sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$	296
201	$\int x(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{1}{5}(x^2-a^2)^{5/2} + C$	299
202	$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3 sec^{-1}\left\|\frac{x}{a}\right\| + C$	299
203	$\int x^n(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(x^2-a^2)^{3/2} - \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{x^2-a^2}dx \quad ; n \neq -1$	301
204	$\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx \quad ; n \neq -1$	302
205	$\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C \quad ; n \neq -2$	303
206	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\| + C \quad ; \|x\| > \|a\|$	304
207	$\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}} \quad ; n \neq 2$	305

208	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$	307
209	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\|\frac{x}{a}\right\| + C$ ...(i) $= \frac{1}{a}\cos^{-1}\left\|\frac{a}{x}\right\| + C$ ...(ii)	308
210	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$	309
211	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + C$; $a \neq 0$	311
212	$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - \cos^{-1}\left\|\frac{a}{x}\right\| + C$	312
213	$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$	314
214	$\int \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\,dx = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$	315
215	$\int \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$	317
216	$\int \frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{a}\cos^{-1}\left\|\frac{a}{x}\right\|\right\} + C$	318
217	$\int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\,dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\| + C$	320
218	$\int \frac{1}{x^2\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right\} + C$	322

219	$\int \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}dx=\frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}\right\}+C$	324
220	$\int \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}dx=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}+C$	325
221	$\int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}dx=-\frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}+C$	327

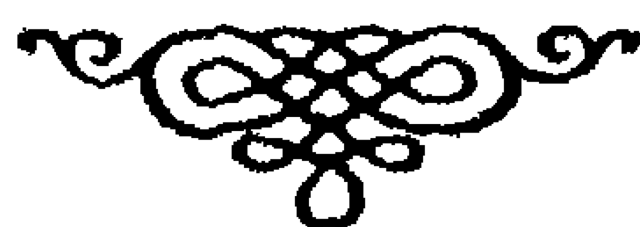
تكاملات تحتوي على $\sqrt{a^2-x^2}$, $\left(a^2-x^2\right)$:

222	$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C \qquad ;a\neq 0$	328
223	$\int \frac{x}{a^2-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln\left\|a^2-x^2\right\|+C$	329
224	$\int \frac{1}{x\left(a^2-x^2\right)}dx=\frac{1}{2a^2}\ln\left\|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right\|+C \qquad ;a\neq 0$	331
225	$\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^2}dx=\frac{x}{2a^2\left(a^2-x^2\right)}+\frac{1}{4a^3}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C \qquad ;a\neq 0$	332
226	$\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx=\frac{x}{2a^2\left(n-1\right)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}+\frac{\left(2n-3\right)}{2a^2\left(n-1\right)}\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx \qquad ;\ n\neq 1, a\neq 0$	334
227	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad ;\ a>0 \quad ;\ \|x\|<\|a\|$	336
228	$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+C$	338

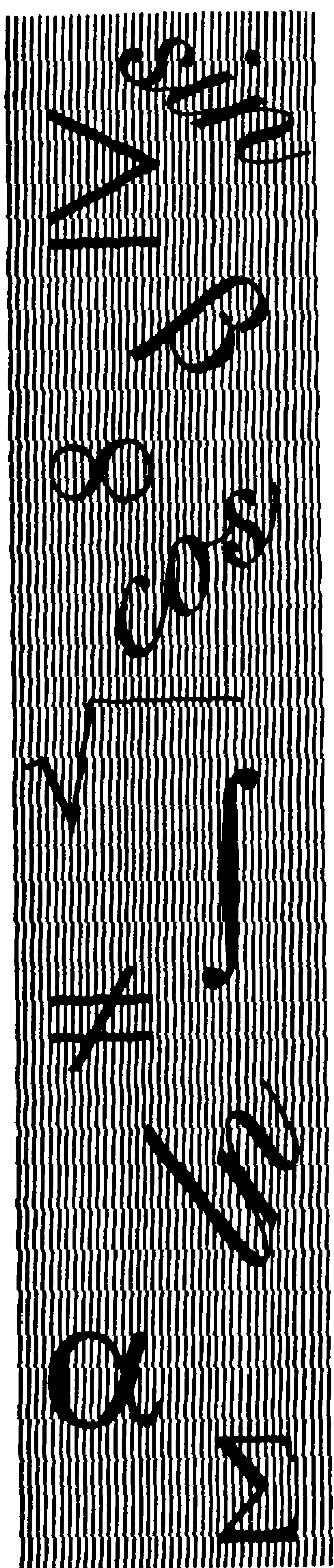
229	$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}\left(a^2-2x^2\right)+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$; $a>0$	339
230	$\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $n\neq-2$	341
231	$\int\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}\left(5a^2-2x^2\right)+\frac{3}{8}a^4\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$; $a>0$	343
232	$\int x\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=-\frac{1}{5}\left(a^2-x^2\right)^{5/2}+C$	344
233	$\int\frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{x}dx=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{3}+a^2\sqrt{a^2-x^2}-a^3\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\|+C$	346
234	$\int x^n\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $n\neq-1$	348
235	$\int\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n dx=\frac{1}{n+1}x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n+\frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n$; $n\neq-1$	349
236	$\int x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n dx=-\frac{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C$	350

237	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad ; \ a>0$	351
238	$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n}dx = \frac{x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)} + \frac{n-3}{a^2(n-2)}\int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2}}dx \quad ; \ n\neq 2$	352
239	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C$	354
240	$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\|+C$	355
241	$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad ; \ a>0$	357
242	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x}+C$	358
243	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\|+C$	359
244	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \ ; \ a>0$	361
245	$\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$	362
246	$\int \frac{x}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$	363

247	$\int \frac{1}{x(a^2-x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\|+C$	365
248	$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad ; a>0$	367
249	$\int \frac{1}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{a^4}\left\{-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}+C$	368
250	$\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{5/2}}dx=\frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(a^2-x^2)^{3/2}}\right\}+C$	370
251	$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^{5/2}}dx=\frac{1}{3}\frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}+C$	371
252	$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{5/2}}dx=\frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{(a^2-x^2)^{3/2}}+C$	372



حلول التكاملات السابقة





$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln\,|\,f(x)|+C$$

حيث $f'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$f(x)=u \qquad ; \quad u \neq 0 \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) نجد أن :

$$f'(x)dx = du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $f'(x)dx\,,\,f(x)$ من $(3),(2)$ على الترتيب في (1) نجد أن:

$$I = \int \frac{1}{u}du \qquad .....(4)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(ln\,u)=\frac{1}{u}du \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $\frac{1}{u}du$ من (5) في (4) ، نجد أن :

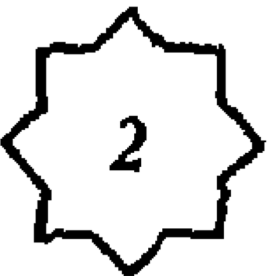
$$I = \int d(ln\,u) = \begin{cases} ln\,u + C & ; \quad u>0 \\ ln(-u)+C & ; \quad u<0 \end{cases}$$

$$= ln\,|\,u\,|+C \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (6) نجد أن:

$$I = ln|\,f(x)|+C \qquad .....(7)$$

من $(7),(1)$ يثبت صحة المطلوب.



$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+C$$

حيث $f'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض، ولنفترض أن:

$$f(x)=u \quad ; \quad u>0 \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$f'(x)dx=du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $f'(x)dx$, $f(x)$ من $(2),(3)$ على الترتيب في (1) نجد أن:

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$=\int u^{-1/2}du \qquad .....(4)$$

وباستخدام صيغة التكامل: $\int z^n dz=\frac{z^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \quad n\neq -1$

$$I=\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{u^{1/2}}{1/2}+C$$

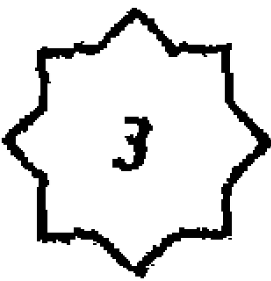
$$=2u^{1/2}+C$$

$$=2\sqrt{u}+C \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن u من (2) في (5)، نجد أن:

$$I=2\sqrt{f(x)}+C \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.



$$\int \sin ax\, dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sin ax\, dx \qquad .....(1)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\cos ax)=-a\sin ax\, dx \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على $sin\ ax\ dx$ في الصورة:

$$\sin ax\, dx = -\frac{1}{a} d(\cos ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $sin\ ax\ dx$ من (3) في (1) ، نجد ان:

$$\begin{aligned} I &= \int -\frac{1}{a} d(\cos ax) \\ &= -\frac{1}{a}\int d(\cos ax) \\ &= -\frac{1}{a}\cos ax + C \qquad .....(4) \end{aligned}$$

من (4) و(1) يثبت صحة المطلوب.

4

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sin^2 ax\, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا ان:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $\sin^2 ax$ في (1) بدلالة $\cos 2ax$ ، نجد ان:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2ax)dx \\ &= \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{1}{2}\cos 2ax\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2ax\, dx \qquad .....(3) \end{aligned}$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان:

$$d(\sin 2ax) = 2a\cos 2ax\, dx \qquad .....(4)$$

ومن (4) نحصل على $\cos 2ax\, dx$ في الصورة:

$$\cos 2ax\, dx = \frac{1}{2a} d(\sin 2ax) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos 2ax\, dx$ من (5) في (3)، نجد ان:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2a} d(\sin 2ax) \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4a}\int d(\sin 2ax) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C \qquad .....(6) \end{aligned}$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

5

$$\int \sin^n ax\, dx = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sin^n ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int \sin^{n-1} ax \sin ax\, dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\cos ax) = -a \sin ax\, dx \qquad .....(3)$$

ومن (3) نحصل على $\sin ax\, dx$ في الصورة:

$$\sin ax\, dx = -\frac{1}{a} d(\cos ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $\sin ax\, dx$ من (4) في (2)، نجد أن:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^{n-1} ax \cdot \left\{-\frac{1}{a} d(\cos ax)\right\} \\ &= -\frac{1}{a}\int \sin^{n-1} ax\, d(\cos ax) \\ &= -\frac{1}{a} I_1 \qquad .....(5) \end{aligned}$$

حيث افترضنا أن:

$$I_1 = \int \sin^{n-1} ax\, d(\cos ax) \qquad .....(6)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض ان:

$$u = \sin^{n-1} ax \qquad .....(7)$$

$$dv = d(\cos ax) \qquad .....(8)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (7)، نجد ان:

$$du = a(n-1)\sin^{n-2} ax \cos ax\, dx \qquad .....(9)$$

وبتكامل الطرفين في (8)، نجد ان:

$$v = \cos ax \qquad ...(10)$$

وباستخدام (8),(7) في (6)، نجد ان I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u\, dv \qquad ...(11)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (11)، نجد ان:

$$I_1 = uv - \int v\, du \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن u, du, v من (7),(9),(10) على الترتيب في (12)، نجد ان:

$$I_1 = \sin^{n-1} ax \cdot \cos ax - \int \cos ax \left\{a(n-1)\sin^{n-2} ax \cos ax\, dx\right\}$$

$$= \sin^{n-1} ax \cos ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^2 ax\, dx \qquad ...(13)$$

من قوانين حساب المثلثات، معلوم لدينا ان:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \qquad (14)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (14) للتعبير عن $\cos^2 ax$ في الطرف الأيمن من (13) بدلالة $\sin^2 ax$، نجد ان:

$$I_1 = \sin^{n-1} ax \cos ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \left(1 - \sin^2 ax\right)dx$$

$$= \sin^{n-1} ax \cos ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax\, dx + a(n-1)\int \sin^n ax\, dx \qquad ...(15)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (15) هو التكامل في (1)، فإن:

$$I_1 = \sin^{n-1} ax \cos ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax\, dx + a(n-1)I \qquad ...(16)$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 من (16) في (5)، نجد ان:

$$I = -\frac{1}{a}\left\{\sin^{n-1} ax \cos ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax\, dx + a(n-1)I\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{n-1} ax \cos ax + (n-1)\int \sin^{n-2} ax\, dx - (n-1)I$$

$$I + (n-1)I = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{a} + (n-1)\int \sin^{n-2} ax\, dx \qquad ...(17)$$

فإذا لاحظنا في (17) أن $I+(n-1)I=nI$ وبقسمة طرفي (17) على n، نجد أن:

$$I=\frac{-\sin^{n-1}ax\cos ax}{na}+\frac{(n-1)}{n}\int\sin^{n-2}ax\,dx \qquad ...(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب.

6

$$\int x\sin ax\,dx=\frac{\sin ax}{a^2}-\frac{x\cos ax}{a}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\sin ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I نستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض ان:

$$u=x \qquad .....(2)$$

$$dv=\sin ax\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du=dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$v=-\frac{1}{a}\cos ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3),(2) في (1)، نجد أن I في (1) تأخذ الصورة:

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (2), (4), (5) على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$\begin{aligned} I &= x\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)-\int\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)dx \\ &= \frac{-x\cos ax}{a}+\frac{1}{a}\int\cos ax\,dx \\ &= \frac{-x\cos ax}{a}+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\sin ax\right)+C \\ &= \frac{\sin ax}{a^2}-\frac{x\cos ax}{a}+C \qquad .....(8)\end{aligned}$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.



$$\int x^n \sin ax\,dx = \frac{-x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \sin ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \sin ax\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du = nx^{n-1}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$v = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) و (2) في (1)، نجد أن I في (1) تأخذ الصورة:

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من $(2),(4),(5)$ على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$I = x^n\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) - \int\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)\cdot nx^{n-1}dx$$

$$= \frac{-x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.



$$\int \frac{\sin ax}{x^n}dx = \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\sin ax}{x^{n-1}} - a\int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx\right\} \;;\; n > 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sin ax}{x^n}dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = \sin ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{x^n} dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du = a \cos ax \, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$\int dv = \int \frac{1}{x^n} dx$$

$$= \int x^{-n} dx$$

$$\therefore v = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$$

$$= \frac{1}{(1-n) x^{n-1}} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) و (2) في (1)، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (3),(4),(2) على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$I = \sin ax \left\{ \frac{1}{(1-n) x^{n-1}} \right\} - \int \frac{1}{(1-n) x^{n-1}} \cdot a \cos ax \, dx$$

$$= \frac{\sin ax}{(1-n) x^{n-1}} - \frac{a}{1-n} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx$$

$$= \frac{1}{1-n} \left\{ \frac{\sin ax}{x^{n-1}} - a \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx \right\} \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

9

$$\int \frac{1}{1 + \sin ax} dx = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{1 + \sin ax} dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \qquad .....(2)$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad .....(3)$$

سنستخدم $(2),(3)$ للتعبير عن $\sin ax$ في الصورة التالية:

$$\sin ax = \frac{\sin ax}{1} = \frac{2\sin(ax/2)\cos(ax/2)}{\cos^2(ax/2)+\sin^2(ax/2)} \qquad .....(4)$$

بقسمة كل من بسط ومقام الطرف الأيمن في (4) على $\cos^2\frac{ax}{2}$، نجد أن:

$$\sin ax = \frac{2\tan\frac{ax}{2}}{1+\tan^2\frac{ax}{2}} \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $\sin ax$ من (5) في (1)، نجد أن:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1+\frac{2\tan(ax/2)}{1+\tan^2(ax/2)}}dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2(ax/2)}{1+2\tan(ax/2)+\tan^2(ax/2)}dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2(ax/2)}{(1+\tan(ax/2))^2}dx \qquad .....(6) \end{aligned}$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2(ax/2)}{(1+\tan(ax/2))^2}dx \qquad .....(7)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\tan\frac{ax}{2}\right) = \frac{a}{2}\sec^2\frac{ax}{2}dx \qquad .....(8)$$

ومن (8) نحصل على $\sec^2(ax/2)dx$ في الصورة:

$$\sec^2(ax/2)dx = \frac{2}{a}d\,(\tan(ax/2)) \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec^2(ax/2)dx$ من (9) في بسط الطرف الأيمن من (7)، نجد أن:

$$I = \int \frac{\frac{2}{a}d(\tan(ax/2))}{(1+\tan(ax/2))^2}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{1}{(1+\tan(ax/2))^2}\, d(\tan(ax/2)) \qquad ...(10)$$

فإذا لاحظنا أن: $d(\tan(ax/2)) = d(1+\tan(ax/2))$ فإن التكامل في الطرف الأيمن من (10) يأخذ الصورة:

$$I = \frac{2}{a}\int \frac{1}{(1+\tan(ax/2))^2}\, d(1+\tan(ax/2))$$

$$= \frac{2}{a}\int (1+\tan(ax/2))^{-2}\, d(1+\tan(ax/2)) \qquad ...(11)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (11) على الصورة:

$$\int u^{-2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C$$

$$= -\frac{1}{u}+C$$

$$\therefore I = \frac{2}{a}\left\{\frac{-1}{1+\tan(ax/2)}\right\}+C$$

$$= \frac{-1}{a}\left\{\frac{2}{1+\tan(ax/2)}\right\}+C \qquad ..(12)$$

لنعبر عن بسط الكسر داخل القوس { } في (12) على الصورة:

$$2 = (1-\tan(ax/2)) + (1+\tan(ax/2))$$

$$I = -\frac{1}{a}\left\{\frac{(1-\tan(ax/2))+(1+\tan(ax/2))}{(1+\tan(ax/2))}\right\}+C \qquad ...(13)$$

بقسمة البسط على المقام داخل القوس { } في (13)، نجد أن:

$$I = -\frac{1}{a}\left\{\frac{1-\tan(ax/2)}{1+\tan(ax/2)}+\frac{1+\tan(ax/2)}{1+\tan(ax/2)}\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{\frac{1-\tan(ax/2)}{1+\tan(ax/2)}+1\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{a}\,\frac{1-\tan(ax/2)}{1+\tan(ax/2)}+C_1 \qquad ...(14)$$

حيث $C_1 = -\frac{1}{a}+C$ ولأن C, C_1 كل منهما ثابت اختياري. سنكتب C بدلاً من C_1 دائمًا.

ولأن $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ فإنه يمكن صياغة (14) في الصورة التالية:

$$I=-\frac{1}{a}\left\{\frac{\tan(\pi/4)-\tan(ax/2)}{1+\tan(\pi/4)\tan(ax/2)}\right\}+C \qquad ...(15)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\tan(m-n)=\frac{\tan m-\tan n}{1+\tan m\ \tan n}$$

في التعبير عن المقدار بين القوسين { } في *(15)*، نجد أن:

$$I=-\frac{1}{a}\tan\left((\pi/4)-(ax/2)\right)+C \qquad (16)$$

من *(16)* و *(1)* يثبت صحة المطلوب.

10

$$\int\frac{1}{1-\sin ax}dx=\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{1}{1-\sin ax}dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1=\cos^2\theta+\sin^2\theta \qquad .....(2)$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad .....(3)$$

سنستخدم *(3)*,*(2)* للتعبير عن $\sin ax$ في الصورة التالية:

$$\sin ax=\frac{\sin ax}{1}$$

$$=\frac{2\sin(ax/2)\cos(ax/2)}{\cos^2(ax/2)+\sin^2(ax/2)} \qquad .....(4)$$

بقسمة كل من بسط ومقام الطرف الأيمن في *(4)* على $\cos^2(ax/2)$، نجد أن:

$$\sin ax=\frac{2\tan(ax/2)}{1+\tan^2(ax/2)} \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $\sin ax$ من *(5)* في *(1)*، نجد أن:

$$I=\int\frac{1}{1-\frac{2\tan(ax/2)}{1+\tan^2(ax/2)}}dx$$

$$= \int \frac{1+\tan^2(ax/2)}{1-2\tan(ax/2)+\tan^2(ax/2)}dx$$

$$= \int \frac{1+\tan^2(ax/2)}{(1-\tan(ax/2))^2}dx \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$I = \int \frac{\sec^2(ax/2)dx}{(1-\tan(ax/2))^2} \qquad .....(7)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\tan(ax/2)) = \frac{a}{2}\sec^2(ax/2)dx \qquad .....(8)$$

ومن *(8)* نحصل على $\sec^2(ax/2)dx$ في الصورة:

$$\sec^2(ax/2)dx = \frac{2}{a}d(\tan(ax/2)) \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec^2(ax/2)dx$ من *(9)* في بسط الطرف الأيمن من *(7)*، نجد أن:

$$I = \int \frac{\frac{2}{a}d(\tan(ax/2))}{(1-\tan(ax/2))^2}$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{1}{(1-\tan(ax/2))^2}d(\tan(ax/2)) \qquad ...(10)$$

فإذا لاحظنا أن: $d(\tan(ax/2)) = -d(1-\tan(ax/2))$ فإن التكامل في الطرف الأيمن من *(10)* يأخذ الصورة:

$$I = \frac{-2}{a}\int \frac{1}{(1-\tan(ax/2))^2}d\left(1-\tan\frac{ax}{2}\right)$$

$$= \frac{-2}{a}\int \left(1-\tan\frac{ax}{2}\right)^{-2}d\left(1-\tan\frac{ax}{2}\right) \qquad ...(11)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من *(11)* على الصورة:

$$\int u^{-2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C$$

$$= \frac{-1}{u}+C$$

$$I = \frac{-2}{a}\left\{\frac{-1}{1-\tan(ax/2)}\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{2}{1-\tan(ax/2)}\right\}+C \qquad ...(12)$$

لنعبر عن بسط الكسر داخل القوس $\{\ \}$ في *(12)* على الصورة:

$$2 = (1-\tan(ax/2)) + (1+\tan(ax/2))$$

$$I = \frac{1}{a}\left\{\frac{(1-\tan(ax/2))+(1+\tan(ax/2))}{(1-\tan(ax/2))}\right\}+C \qquad ...(13)$$

بقسمة البسط على المقام داخل القوس $\{\ \}$ في *(13)*، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a}\left\{\frac{1+\tan(ax/2)}{1-\tan(ax/2)}+\frac{1-\tan(ax/2)}{1-\tan(ax/2)}\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{1+\tan(ax/2)}{1-\tan(ax/2)}+1\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1+\tan(ax/2)}{1-\tan(ax/2)}+C_1 \qquad ...(14)$$

حيث $C_1 = (1/a)+C$ ولأن C, C_1 كل منهما ثابت اختياري سنكتب C بدلاً من C_1 دائمًا.

ولأن $\tan(\pi/4) = 1$ فإنه يمكن صياغة *(14)* في الصورة التالية:

$$I = \frac{1}{a}\left\{\frac{\tan(\pi/4)+\tan(ax/2)}{1-\tan(\pi/4)\tan(ax/2)}\right\}+C \qquad ..(15)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\tan(m+n) = \frac{\tan m + \tan n}{1-\tan m \tan n}$$

في التعبير عن المقدار بين القوسين $\{\ \}$ في *(15)*، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+C \qquad ...(16)$$

من *(1),(16)* يثبت صحة المطلوب.

11 $$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cos ax\, dx \qquad .....(1)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sin ax) = a\cos ax\, dx \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على $\cos ax\, dx$ في الصورة:

$$\cos ax\, dx = \frac{1}{a}d(\sin ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos ax\, dx$ من (3) في (1)، نجد أن:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{a}d(\sin ax) \\ &= \frac{1}{a}\int d(\sin ax) \\ &= \frac{1}{a}\sin ax + C \qquad .....(4) \end{aligned}$$

من $(4),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

12 $$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cos^2 ax\, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $cos^2 ax$ في (1) بدلالة $cos\,2ax$ ، نجد أن:

$$I=\int \frac{1}{2}(1+\cos 2ax)dx$$

$$=\int \frac{1}{2}dx+\int \frac{1}{2}\cos 2ax\,dx$$

$$=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int \cos 2ax\,dx \qquad .....(3)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sin 2ax)=2a\cos 2ax\,dx \qquad .....(4)$$

ومن (4) نحصل على $cos\,2ax\,dx$ في الصورة:

$$\cos 2ax\,dx=\frac{1}{2a}d(\sin 2ax) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $cos\,2ax\,dx$ من (5) في (3)، نجد أن:

$$I=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{2a}d(\sin 2ax)$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4a}\int d(\sin 2ax)$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2ax}{4a}+C \qquad .....(6)$$

من (1),(6) يثبت صحة المطلوب.

13

$$\int \cos^n ax\,dx=\frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na}+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \cos^n ax\,dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I=\int \cos^{n-1} ax \cos ax\,dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sin ax)=a\cos ax\,dx \qquad .....(3)$$

ومن (3) نحصل على $\cos ax\, dx$ في الصورة:

$$\cos ax\, dx = \frac{1}{a} d(\sin ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos ax\, dx$ من (4) في (2)، نجد ان:

$$I = \int \cos^{n-1} ax \cdot \left\{ \frac{1}{a} d(\sin ax) \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \int \cos^{n-1} ax\, d(\sin ax) = \frac{1}{a} I_1 \qquad .....(5)$$

حيث افترضنا ان:

$$I_1 = \int \sin^{n-1} ax\, d(\sin ax) \qquad .....(6)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض ان:

$$u = \cos^{n-1} ax \qquad .....(7)$$

$$dv = d(\sin ax) \qquad .....(8)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (7)، نجد ان:

$$du = -a(n-1)\cos^{n-2} ax \sin ax\, dx \qquad .....(9)$$

وبتكامل الطرفين في (8)، نجد ان:

$$v = \sin ax \qquad ...(10)$$

وباستخدام $(8),(7)$ في (6)، نجد ان I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = u\, dv \qquad ...(11)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (11)، نجد ان:

$$I_1 = uv - \int v\, du \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن u, du, v من $(7),(9),(10)$ على الترتيب في (12)، نجد ان:

$$I_1 = \cos^{n-1} ax \sin ax - \int \sin ax \cdot \left\{ -a(n-1)\cos^{n-2} ax \sin ax\, dx \right\}$$

$$= \cos^{n-1} ax \sin ax + a(n-1) \int \cos^{n-2} ax \sin^2 ax\, dx \qquad ...(13)$$

من قوانين حساب المثلثات، معلوم لدينا ان:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \qquad ...(14)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (14) للتعبير عن $\sin^2 ax$ في الطرف الأيمن من (13) بدلالة $\cos^2 ax$، نجد ان:

$$I_1 = \cos^{n-1} ax \sin ax + a(n-1) \int \cos^{n-2} ax \left(1 - \cos^2 ax\right) dx$$

$$= \cos^{n-1} ax \sin ax + a(n-1) \int \cos^{n-2} ax\, dx -$$

$$a(n-1) \int \cos^{n} ax\, dx \qquad ...(15)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (15) هو التكامل في (1)، فإن:

$$I_1 = \cos^{n-1} ax \sin ax + a(n-1)\int \cos^{n-2} ax\, dx - a\,(n-1)I \qquad ...(16)$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 من (16) في (5)، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a}\left\{ \cos^{n-1} ax \sin ax + a(n-1)\int \cos^{n-2} ax\, dx - a\,(n-1)I \right\}$$

$$= \frac{1}{a}\cos^{n-1} ax \sin ax + (n-1)\int \cos^{n-2} ax\, dx - (n-1)I$$

$$I + (n-1)I = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{a} + (n-1)\int \cos^{n-2} ax\, dx \qquad ...(17)$$

فإذا لاحظنا في (17) ان $I + (n-1)I = nI$ وبقسمة طرفي (17) على n، نجد أن:

$$I = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx \qquad ...(18)$$

من $(1),(18)$ يثبت صحة المطلوب.

14

$$\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\cos ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = x \qquad .....(2)$$

$$dv = \cos ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du = dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$v = \frac{1}{a}\sin ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام $(3),(2)$ في (1)، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من $(5),(4),(2)$ على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$I = x\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) - \int\left(\frac{1}{a}\sin ax\right)dx$$

$$= \frac{x\sin ax}{a} - \frac{1}{a}\int \sin ax\,dx$$

$$= \frac{x\sin ax}{a} - \frac{1}{a}\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) + C$$

$$= \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a} + C \qquad .....(8)$$

من $(8),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

15

$$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n\cos ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \cos ax\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du = n\,x^{n-1}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$v = \frac{1}{a}\sin ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام $(3),(2)$ في (1)، نجد أن I في (1) تأخذ الصورة.

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من $(5),(4),(2)$ على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$I = x^n\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\sin ax\right)\cdot nx^{n-1}dx$$

$$= \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx \qquad .....(8)$$

من $(8),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

16

$$\int \frac{\cos ax}{x^n}dx = \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\cos ax}{x^{n-1}} + a\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx\right\} \; ; \; n > 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\cos ax}{x^n}dx \; ; \; n > 1 \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = \cos ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{x^n dx} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2)، نجد أن:

$$du = -a\sin ax\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، نجد أن:

$$v = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \qquad .....(5)$$

وباستخدام $(3),(2)$ في (1)، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد أن:

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

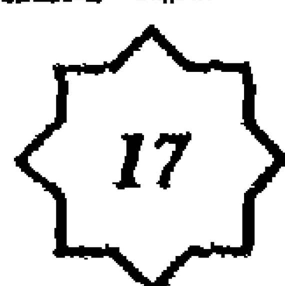
بالتعويض عن u,du,v من $(3),(4),(2)$ على الترتيب في (7)، نجد أن:

$$I = \cos ax\left\{\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right\} - \int \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\{-a\sin ax\, dx\}$$

$$= \frac{\cos ax}{(1-n)x^{n-1}} + \frac{a}{1-n}\int \frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{1-n}\left\{\frac{\cos ax}{x^{n-1}}+a\int\frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx\right\}\;;\;n>1 \qquad .....(8)$$

من $(8),(1)$ يثبت صحة المطلوب.



$$\int\frac{1}{1+\cos ax}dx=\frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{1}{1+\cos ax}dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\therefore\; 1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $(1+\cos ax)$ في (1)، نجد أن:

$$I=\int\frac{1}{2\cos^2(ax/2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2(ax/2)}dx \qquad .....(3)$$

ولأن $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$$\therefore\; I=\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{ax}{2}dx \qquad .....(4)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\tan\frac{ax}{2}\right)=\frac{a}{2}\sec^2\frac{ax}{2}dx \qquad .....(5)$$

$$\therefore\; \sec^2\frac{ax}{2}dx=\frac{2}{a}d\left(\tan\frac{ax}{2}\right) \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec^2\dfrac{ax}{2}dx$ من (6) في (4)، نجد أن:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2}{a}d\left(\tan\frac{ax}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\int d\left(\tan\frac{ax}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+C \qquad .....(7)$$

من (7),(1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int \frac{1}{1-\cos ax}dx=-\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}+C \qquad (18)$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{1-\cos ax}dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$$

$$\therefore\ 1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $(1-\cos ax)$ في (1)، نجد أن:

$$I=\int \frac{1}{2\sin^2(ax/2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2(ax/2)}dx \qquad .....(3)$$

ولأن $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\frac{ax}{2}\,dx \qquad .....(4)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\cot\frac{ax}{2}\right)=-\frac{a}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{ax}{2}\,dx$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}^2\frac{ax}{2}\,dx=-\frac{2}{a}d\left(\cot\frac{ax}{2}\right) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $cosec^2 \frac{ax}{2} dx$ من (5) في (4)، نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\int -\frac{2}{a} d\left(cot\frac{ax}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\int d\left(cot\frac{ax}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{a} cot\frac{ax}{2} + C \qquad .....(6)$$

من (1),(6) يثبت صحة المطلوب.

19

$$\int tan ax\, dx = \frac{1}{a} ln\left|sec ax\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int tan ax\, dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة $tan ax$ بسطا ومقاما في $sec ax$، نجد أن:

$$I = \int \frac{sec ax\, tan ax}{sec ax} dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(sec ax) = a \;\; sec ax \;\; tan ax \;\; dx$$

$$\therefore \; \frac{1}{a} d(sec ax) = sec ax \;\; tan ax \;\; dx \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $sec ax \;\; tan ax \;\; dx$ من (3) في (2)، نجد أن:

$$I = \int \frac{\frac{1}{a} d(sec ax)}{sec ax}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{sec ax} d(sec ax) \qquad .....(4)$$

والتكامل في الطرف الأيمن من (4) على الصورة:

$$\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C \qquad .....(5)$$

وباستخدام (5) في (4)، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a} ln\left|sec ax\right| + C \qquad .....(6)$$

من (6),(1) يثبت صحة المطلوب.
لاحظ: يمكن صياغة المطلوب على الصورة:

$$\int tan\,ax\,dx = -\frac{1}{a} ln\left| cos\,ax \right| + C$$

20

$$\int tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a} tan\,ax - x + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int tan^2 ax\ \ dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$$

$$\therefore\ tan^2\theta = sec^2\theta - 1 \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن $tan^2 ax$ في الطرف الأيمن من (1) بدلالة $sec^2 ax$ ، نجد أن:

$$I = \int \left(sec^2 ax - 1\right)dx$$

$$= \int sec^2 ax\,dx - \int dx \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(tan\,ax\right) = a\,sec^2 ax\,dx$$

$$\therefore\ sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a} d\left(tan\,ax\right) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $sec^2 ax\,dx$ من (4) في (3)، نجد أن:

$$I = \int \frac{1}{a} d\left(tan\,ax\right) - \int dx$$

$$= \frac{1}{a}\int d\left(tan\,ax\right) - \int dx$$

$$= \frac{1}{a} tan\,ax - x + C \qquad .....(5)$$

من (5) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{21} \quad \int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx \quad ; \quad n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \tan^n ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int \tan^{n-2} ax \ \tan^2 ax \ dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \ \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \qquad .....(3)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (3) للتعبير عن قيمة $\tan^2 ax$ في (2) بدلالة $\sec^2 ax$، نجد أن:

$$I = \int \tan^{n-2} ax \left(\sec^2 ax - 1\right) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} ax \ \sec^2 ax\, dx - \int \tan^{n-2} ax \ dx \qquad .....(4)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\tan ax\right) = a \sec^2 ax \ dx$$

$$\therefore \ \sec^2 ax \ dx = \frac{1}{a} d\left(\tan ax\right) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec^2 ax\, dx$ من (5) في (4)، نجد أن:

$$I = \int \tan^{n-2} ax \cdot \frac{1}{a}\left(\tan ax\right) - \int \tan^{n-2} ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \tan^{n-2} ax \ d\left(\tan ax\right) - \int \tan^{n-2} ax \ dx \qquad .....(6)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن من (6) على الصورة:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\therefore \ I = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \ dx \qquad .....(7)$$

من $(1),(7)$ يثبت صحة المطلوب.

$$\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C \qquad (22)$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cot ax \, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\cot ax = \frac{\cos ax}{\sin ax} \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $\cot ax$ في (1) بدلالة $\sin ax$ ، $\cos ax$، نجد أن:

$$I = \int \frac{\cos ax}{\sin ax} dx \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sin ax) = a \cos ax \, dx$$

$$\therefore \ \cos ax \, dx = \frac{1}{a} d(\sin ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos ax\, dx$ من (4) في (3)، نجد أن:

$$I = \int \frac{1}{\sin ax} \cdot \frac{1}{a} d(\sin ax)$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sin ax} d(\sin ax) \qquad .....(5)$$

والتكامل في الطرف الأيمن من (5) على الصورة:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \qquad .....(6)$$

وباستخدام (6) في (5)، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C \qquad .....(7)$$

من $(7),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

$$\int \cot^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C \qquad (23)$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cot^2 ax \, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1+cot^2\theta = cosec^2\theta$$

$$\therefore\ cot^2\theta = cosec^2\theta - 1 \qquad .....(2)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (2) للتعبير عن قيمة $cot^2 ax$ في (1) بدلالة $cosec^2ax$، نجد أن:

$$I = \int \left(cosec^2ax - 1\right)dx$$

$$= \int cosec^2ax\ dx - \int dx \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(cot\,ax\right) = -a\ cosec^2ax\ dx$$

$$\therefore\ cosec^2ax\ dx = -\frac{1}{a}d\left(cot\,ax\right) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $cosec^2ax\ dx$ من (4) في (3)، نجد أن:

$$I = \int \left\{-\frac{1}{a}d\ \left(cot\,ax\right)\right\} - \int dx$$

$$= -\frac{1}{a}\int d\ \left(cot\,ax\right) - \int dx$$

$$= -\frac{1}{a}cot\,ax - x + C \qquad (5)$$

من (5),(1) يثبت صحة المطلوب.

24

$$\int cot^n\,ax\,dx = -\frac{cot^{n-1}\,ax}{a\left(n-1\right)} - \int cot^{n-2}\,ax\,dx \quad ; \quad n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cot^n\,ax\,dx \quad ; \quad n \neq 1 \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int cot^{n-2}ax\ \ cot^2ax\ \ dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1+cot^2\theta = cosec^2\theta$$

$$\therefore\ cot^2\theta = cosec^2\theta - 1 \qquad .....(3)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (3) للتعبير عن قيمة $cot^2 ax$ في (2) بدلالة $cosec^2\theta$، نجد أن:

$$I = \int cot^{n-2} ax \left(cosec^2 ax - 1\right)dx$$

$$= \int cot^{n-2} ax\, cosec^2 ax\, dx - \int cot^{n-2} ax\, dx \qquad .....(4)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(cot\, ax\right) = -a\, cosec^2 ax\, dx$$

$$\therefore\ cosec^2 ax\, dx = -\frac{1}{a} d\left(cot\, ax\right) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $cosec^2 ax\, dx$ من (5) في (4)، نجد ان:

$$I = \int cot^{n-2} ax \cdot \left\{-\frac{1}{a} d\left(cot\, ax\right)\right\} - \int cot^{n-2} ax\, dx$$

$$= -\frac{1}{a} \int cot^{n-2} ax\, d\left(cot\, ax\right) - \int cot^{n} ax\, dx \qquad .....(6)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن من (6) على الصورة:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\therefore\ I = -\frac{cot^{n-1} ax}{a\left(n-1\right)} - \int cot^{n-2} ax\, dx \qquad .....(7)$$

من (7),(1) يثبت صحة المطلوب.

25

$$\int sec\, ax\, dx = \frac{1}{a} ln\left|sec\, ax + tan\, ax\right| + C \qquad ....(i)$$

$$= \frac{1}{a} ln\left|tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)\right| + C \qquad ....(ii)$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int sec\, ax\, dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة $sec\, ax$ بسطا ومقاما في $a\left(sec\, ax + tan\, ax\right)$، نجد ان:

$$I = \int \frac{a\, sec\, ax\left(sec\, ax + tan\, ax\right)}{a\left(sec\, ax + tan\, ax\right)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{a\, sec\, ac\, tan\, ax + a\, sec^2 ax}{sec\, ax + tan\, ax} dx \qquad .....(2)$$

فإذا لاحظنا في (2) أن البسط هو تفاضلة المقام، اي ان التكامل في الطرف الأيمن على الصورة $\int \frac{1}{u}du$ وحيث ان:

$$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$$

$$I = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C \qquad .....(3)$$

من $(3),(1)$ يثبت صحة الطرف (i) من القانون.

ولإثبات صحة الطرف (ii) سنثبت ان:

$$\sec ax + \tan ax = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) \qquad .....(4)$$

$$\sec ax + \tan ax = \frac{1}{\cos ax} + \tan ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام المتطابقتين المثلثتين:

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}\ ,\ \tan\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)}$$

$$\therefore\ \sec ax + \tan ax = \frac{1+\tan^2(ax/2)}{1-\tan^2(ax/2)} + \frac{2\tan(ax/2)}{1-\tan^2(ax/2)}$$

$$= \frac{1+2\tan(ax/2)+\tan^2(ax/2)}{1-\tan^2(ax/2)}$$

$$= \frac{(1+\tan(ax/2))^2}{1-\tan^2(ax/2)}$$

$$= \frac{(1+\tan(ax/2))^2}{(1-\tan(ax/2))(1+\tan(ax/2))}$$

$$= \frac{1+\tan(ax/2)}{1-\tan(ax/2)} \qquad .....(6)$$

ولأن $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ فإنه يمكن صياغة (6) في الصورة التالية:

$$\sec ax + \tan ax = \frac{\tan(\pi/4)+\tan(ax/2)}{1-\tan(\pi/4)\tan(ax/2)} \qquad .....(7)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية:

$$\tan(\theta+\psi)=\frac{\tan\theta+\tan\psi}{1-\tan\theta\ \tan\psi} \qquad .....(8)$$

للتعبير عن الطرف الأيمن في (7)، نجد أن:

$$\sec ax+\tan ax=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) \qquad .....(9)$$

من (9) نكون قد أثبتنا صحة ما افترضنا أنه يجب أن يكون صحيحا في (4). وبأخذ لوغاريتم مقياس طرفي (9)، نجد أن:

$$\ln|\sec ax+\tan ax|=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right| \qquad ...(10)$$

من (10),(3)، نستنتج أن:

$$I=\frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right|+C \qquad ...(11)$$

من (11),(1) يثبت صحة الطرف (ii) في المطلوب.

26

$$\int \sec^2 ax\,dx=\frac{1}{a}\tan ax+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sec^2 ax\,dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\tan ax)=a\sec^2 ax\,dx$$

$$\therefore\ \sec^2 ax\,dx=\frac{1}{a}d(\tan ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec^2 ax\,dx$ من (2) في (1)، نجد أن:

$$I=\int\frac{1}{a}d(\tan ax)$$

$$=\frac{1}{a}\int d(\tan ax)$$

$$=\frac{1}{a}\tan ax+C \qquad .....(3)$$

من (3),(1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int sec^n ax\, dx = \frac{sec^{n-2} ax\, tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2} ax\, dx \quad ; \; n \neq 1$$ 27

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int sec^n ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int sec^{n-2} ax\, sec^2 ax\, dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(tan ax) = a\, sec^2 ax\, dx$$

$$\therefore\; sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a} d(tan ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $sec^2 ax\, dx$ من (3) في (2)، نجد أن:

$$I = \int sec^{n-2} ax \left\{\frac{1}{a} d(tan ax)\right\}$$

$$= \frac{1}{a} I_1 \qquad .....(4)$$

حيث افترضنا أن:

$$I_1 = \int sec^{n-2} ax\, d(tan ax) \qquad .....(5)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = sec^{n-2} ax \qquad .....(6)$$

$$dv = d(tan ax) \qquad .....(7)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (6)، نجد أن:

$$du = a(n-2) sec^{n-2} ax\, tan ax\, dx \qquad .....(8)$$

وبتكامل الطرفين في (7)، نجد أن:

$$v = tan ax \qquad .....(9)$$

وباستخدام $(7),(6)$ في (5)، نجد أن I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u\, dv \qquad ...(10)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (10)، نجد أن:

$$I_1 = uv - \int v\, du \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن u, du, v من $(7),(8),(6)$ على الترتيب في (11)، نجد أن:

$$I_1 = sec^{n-2} ax\, tan ax - \int tan ax \left\{a\,(n-2) sec^{n-2} ax\, tan ax\, dx\right\}$$

$$= sec^{n-2}ax\ tan ax - a(n-2)\int sec^{n-2}ax\ tan^2 ax\ dx \qquad ...(12)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\left.\begin{aligned} 1+tan^2\theta &= sec^2\theta \\ \therefore\ tan^2\theta &= sec^2\theta - 1 \end{aligned}\right\} \qquad ...(13)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (13) للتعبير عن $tan^2 ax$ في الطرف الأيمن من (12) بدلالة $sec^2 ax$، نجد أن:

$$I_1 = sec^{n-2}ax\ tan ax - a(n-2)\int sec^{n-2}ax\left(sec^2 ax - 1\right)dx$$

$$= sec^{n-2}ax\ tan ax + a(n-2)\int sec^{n-2}ax\ dx - a(n-2)\int sec^n ax\ dx \ .... \quad (14)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (14) هو التكامل في (1)، فإنه يمكننا إعادة كتابة (14) في الصورة التالية:

$$I_1 = sec^{n-2}ax\ tan ax + a(n-2)\int sec^{n-2}ax\ dx - a(n-2)I \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (15) في (4)، نجد أن:

$$I = \frac{1}{a}\left\{sec^{n-2}ax\ \ tan ax + a(n-2)\int sec^{n-2}ax\ dx - a(n-2)I\right\}$$

$$= \frac{1}{a}sec^{n-2}ax\ \ tan ax + (n-2)\int sec^{n-2}ax\ dx - (n-2)I$$

$$I + (n-2)I = \frac{sec^{n-2}ax\ \ tan ax}{a} + (n-2)\int sec^{n-2}ax\ dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا في (16) ان $I + (n-2)I = (n-1)I$ وبقسمة طرفي (16) على $(n-1)$، نجد أن:

$$I = \frac{sec^{n-2}ax\ tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}ax\ dx \qquad ...(17)$$

من $(17),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

28

$$\int cosec\ ax\ dx = -\frac{1}{a}ln\left|cosec\ ax + cot ax\right| + C \ .... (i)$$

$$= \frac{1}{a}ln\left|tan\frac{ax}{2}\right| + C \ .... (ii)$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cosec\ ax\ dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة $cosec\ ax$ بسطا ومقاما في $-a(cosec\ ax + cot\ ax)$ ، نجد ان:

$$I = \int \frac{-a(cosec\ ax + cot\ ax)cosec\ ax}{-a(cosec\ ax + cot\ ax)} dx$$

$$= -\frac{1}{a} \int \frac{-a\, cosec\ ax\ cot\ ax - a\ cosec^2\ ax}{cosec\ ax + cot\ ax} dx \qquad .....(2)$$

فإذا لاحظنا في (2) أن البسط هو تفاضلة المقام، اي ان التكامل في الطرف الأيمن على الصورة $\int \frac{1}{u} du$ وحيث أن:

$$\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$$

$$\therefore\ I = -\frac{1}{a} ln\ |cosec\ ax + cot\ ax| + C \qquad .....(3)$$

من (3),(1) يثبت صحة الطرف (i) من المطلوب.

ولإثبات صحة الطرف (ii): من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$cosec\ \theta = \frac{1}{sin\theta} \qquad .....(4)$$

$$sin\theta = 2\, sin\frac{\theta}{2} cos\frac{\theta}{2} \qquad .....(5)$$

وباستخدام المتطابقتين (5),(4) في (1)، نجد ان:

$$I = \int cosec\ ax\ dx$$

$$= \int \frac{1}{sin\, ax}$$

$$= \int \frac{1}{2\, sin\,(ax/2)cos\,(ax/2)} dx \qquad .....(6)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (6) بسطا ومقاما في $(a/cos^2(ax/2))$ ، نجد ان:

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{cos^2(ax/2)}\right\}}{a\left\{\frac{sin\,(ax/2)cos\,(ax/2)}{cos^2\,(ax/2)}\right\}} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{a}{2} sec^2 \frac{ax}{2}}{tan\frac{ax}{2}} dx \qquad .....(7)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\tan\frac{ax}{2}\right)=\frac{a}{2}\sec^2\frac{ax}{2}dx \qquad .....(8)$$

وباستخدام *(8)* في *(7)*، نجد أن:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{d(\tan(ax/2))}{\tan(ax/2)} \qquad .....(9)$$

فإذا لاحظنا في *(9)* أن البسط هو تفاضلة المقام، أي أن التكامل في الطرف الأيمن على الصورة $\int\frac{1}{u}du$ وحيث أن:

$$\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right|+C \qquad ...(10)$$

من *(10)*,*(1)* يثبت صحة الطرف *(ii)* في المطلوب.

29

$$\int \operatorname{cosec}^2 ax\, dx=-\frac{1}{a}\cot ax+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \operatorname{cosec}^2 ax\, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\cot ax)=-a\operatorname{cosec}^2 ax\, dx$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}^2 ax\, dx=-\frac{1}{a}d(\cot ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\operatorname{cosec}^2 ax\, dx$ من *(2)* في *(1)*، نجد أن:

$$I=\int\left\{-\frac{1}{a}d(\cot ax)\right\}$$

$$=-\frac{1}{a}\int d(\cot ax)$$

$$=-\frac{1}{a}\cot ax+C \qquad .....(3)$$

من *(3)*,*(1)* يثبت صحة المطلوب.

30

$$\int cosec^n ax\, dx = -\frac{cosec^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2} ax\, dx \quad ; n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cosec^n ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int cosec^{n-2} ax\, cosec^2 ax\, dx \qquad .....(2)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\cot ax) = -a\, cosec^2 ax\, dx$$

$$\therefore\ cosec^2 ax\, dx = -\frac{1}{a} d(\cot ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $cosec^2 ax\, dx$ من (3) في (1)، نجد أن:

$$I = \int cosec^{n-2} ax \left\{-\frac{1}{a} d(\cot ax)\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}\int cosec^{n-2} ax\, d(\cot ax)$$

$$= -\frac{1}{a} I_1 \qquad .....(4)$$

حيث افترضنا أن:

$$I_1 = \int cosec^{n-2} ax\, d(\cot ax) \qquad .....(5)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = cosec^{n-2} ax \qquad .....(6)$$

$$dv = d(\cot ax) \qquad .....(7)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (6)، نجد أن:

$$du = -a(n-2) cosec^{n-2} ax\, \cot ax\, dx \qquad .....(8)$$

وبتكامل الطرفين في (7)، نجد أن:

$$v = \cot ax \qquad .....(9)$$

وباستخدام $(7),(6)$ في (5)، نجد أن I_1 يأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u\, dv \qquad ...(10)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (10)، نجد أن:

$$I_1 = uv - \int v\, du \quad ...(11)$$

بالتعويض عن u, du, v من (9),(8),(6) على الترتيب في (11)، نجد أن:

$$I_1 = cosec^{n-2}ax \cot ax - \int \cot ax \left\{-a(n-2)cosec^{n-2}ax \cot ax\, dx\right\}$$

$$= cosec^{n-2}ax \cot ax + a(n-2)\int cosec^{n-2}ax \cot^2 ax\, dx \quad ...(12)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$1 + \cot^2\theta = cosec^2\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta = cosec^2\theta - 1 \quad ...(13)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (13) للتعبير عن $\cot^2 ax$ في الطرف الأيمن من (12) بدلالة $cosec^2 ax$، نجد أن:

$$I_1 = cosec^{n-2}ax \cot ax + a(n-2)\int cosec^{n-2}ax \left(cosec^2 ax - 1\right)dx$$

$$= cosec^{n-2}ax \cot ax - a(n-2)\int cosec^{n-2}ax\, dx +$$

$$a(n-2)\int cosec^{n}ax\, dx \quad ...(14)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (14) هو التكامل في (1) فإنه يمكننا إعادة كتابة (14) في الصورة التالية:

$$I_1 = cosec^{n-2}ax \cot ax - a(n-2)\int cosec^{n-2}ax\, dx + a(n-2)I \quad ...(15)$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 من (15) في (4)، نجد أن:

$$I = -\frac{1}{a}\left\{cosec^{n-2}ax \cot ax - a(n-2)\int cosec^{n-2}ax\, dx + a(n-2)I\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}cosec^{n-2}ax \cot ax + (n-2)\int cosec^{n-2}ax\, dx - (n-2)I$$

$$I + (n-2)I = -\frac{1}{a}cosec^{n-2}ax \cot ax + (n-2)\int cosec^{n-2}ax\, dx \quad ...(16)$$

فإذا لاحظنا في (16) أن $I + (n-2)I = (n-1)I$ وبقسمة طرفي (16) على $(n-1)$، نجد أن:

$$I = \frac{-cosec^{n-2}ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2}ax\, dx \quad ...(17)$$

من (17),(1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax + C$$
$$= -\frac{1}{4a}\cos 2ax + C$$
31

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sin ax \cos ax\, dx \qquad .....(1)$$

<u>اولاً: إثبات ان:</u> $\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax + C$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان:

$$d(\sin ax) = a\cos ax\, dx$$
$$\therefore\ \cos ax\, dx = \frac{1}{a}d(\sin ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos ax\, dx$ من *(2)* في *(1)*، نجد ان:

$$I = \int \sin ax \left\{\frac{1}{a}d(\sin ax)\right\}$$
$$= \frac{1}{a}\int \sin ax\, d(\sin ax) \qquad .....(3)$$

فإذا لاحظنا في *(3)* ان التكامل في الطرف الأيمن على الصورة $\int u\, du$ وحيث ان:

$$\int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C$$
$$\therefore\ I = \frac{1}{a}\left\{\frac{\sin^2 ax}{2}\right\} + C = \frac{\sin^2 ax}{2a} + C \qquad .....(4)$$

من *(4)*,*(1)* يثبت ان الطرف الأوسط يساوي الطرف الأيسر في المطلوب.

<u>ثانياً: إثبات ان:</u> $\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{-\cos 2ax}{4a} + C$

بضرب الدالة المتكاملة في *(1)* تحت علامة التكامل في 2 وخارج علامة التكامل في $\frac{1}{2}$، نجد ان:

$$I = \frac{1}{2}\int 2\sin ax \cos ax\, dx \qquad ...(13)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta \qquad ...(14)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية *(14)* في *(13)*، نجد ان:

$$I=\frac{1}{2}\int \sin 2ax\,dx \qquad ...(15)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان:

$$d(\cos 2ax)=-2a\sin 2ax\,dx$$

$$\therefore\ \sin 2ax\,dx=-\frac{1}{2a}d(\cos 2ax) \qquad ...(16)$$

بالتعويض عن $\sin 2ax\,dx$ من *(16)* في *(15)*، نجد ان:

$$I=\frac{1}{2}\int\left\{-\frac{1}{2a}d(\cos 2ax)\right\}$$

$$=-\frac{1}{4a}\int d(\cos 2ax)$$

$$=\frac{-\cos 2ax}{4a}+C \qquad ...(17)$$

من *(17)*,*(1)* يثبت ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر في المطلوب.

32 $$\int \sin ax\cos bx\,dx=-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}-\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}+C\ ;\ a^2\neq b^2$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int \sin ax\cos bx\,dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا ان:

$$\sin\theta\cos\psi=\frac{1}{2}\sin(\theta-\psi)+\frac{1}{2}\sin(\theta+\psi) \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية *(2)* في *(1)* وذلك لتحويل الدالة المتكاملة في *(1)* من حاصل ضرب لدالتين إلى مجموع دالتين بغرض تسهيل إجراء التكامل:

$$I=\int\left\{\frac{1}{2}\sin(ax-bx)+\frac{1}{2}\sin(ax+bx)\right\}dx$$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}\sin(a-b)x+\frac{1}{2}\sin(a+b)x\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sin(a-b)x\,dx+\frac{1}{2}\int \sin(a+b)x\,dx \qquad .....(3)$$

ولقد أثبتنا في العلاقة *(3)*، ان:

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C \qquad .....(4)$$

وباستخدام (4) في (3) ، نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\left\{\frac{-\cos(a-b)x}{a-b}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{-\cos(a+b)x}{a+b}\right\} + C$$

$$= \frac{-\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C \qquad .....(5)$$

بشرط أن $a \neq b\, , a \neq -b$ أي بشرط $a^2 \neq b^2$.

من $(1),(5)$ يثبت صحة المطلوب.

33

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C \quad ; a^2 \neq b^2$$

البرهــان

لنفترض أن:

$$I = \int \sin ax \sin bx\, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\sin\theta \sin\psi = \frac{1}{2}\cos(\theta-\psi) - \frac{1}{2}\cos(\theta+\psi) \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (2) في (1) وذلك لتحويل الدالة المتكاملة في (1) من حاصل ضرب لدالتين إلى فرق دالتين بغرض تسهيل إجراء التكامل:

$$I = \int \left\{\frac{1}{2}\cos(ax-bx) - \frac{1}{2}\cos(ax+bx)\right\} dx$$

$$= \int \left\{\frac{1}{2}\cos(a-b)x - \frac{1}{2}\cos(a+b)x\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(a-b)x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x\, dx \qquad .....(3)$$

ولقد أثبتنا في العلاقة (11) ، أن:

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C \qquad .....(4)$$

وباستخدام (4) في (3) ، نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right\} + C$$

$$=\frac{sin(a-b)x}{2(a-b)}-\frac{sin(a+b)x}{2(a+b)}+C \qquad .....(5)$$

بشرط ان $a\neq b$, $a\neq -b$ اي بشرط ان $a^2\neq b^2$.

من $(1),(5)$ يثبت صحة المطلوب.

34

$$\int cos\,ax\,cos\,bx\,dx=\frac{sin\,(a-b)x}{2(a-b)}+\frac{sin\,(a+b)x}{2(a+b)}+C \quad ;a^2\neq b^2$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int cos\,ax\,cos\,bx\,dx \qquad .....(1)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا ان:

$$cos\theta\,cos\psi=\frac{1}{2}cos(\theta-\psi)+\frac{1}{2}cos(\theta+\psi) \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (2) في (1) وذلك لتحويل الدالة المتكاملة في (1) من حاصل ضرب لدالتين إلى مجموع دالتين بغرض تسهيل إجراء التكامل:

$$I=\int\left\{\frac{1}{2}cos\,(ax-bx)+\frac{1}{2}cos\,(ax+bx)\right\}dx$$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}cos\,(a-b)x+\frac{1}{2}cos\,(a+b)x\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int cos\,(a-b)x\,dx+\frac{1}{2}\int cos\,(a+b)x\,dx \qquad .....(3)$$

ولقد اثبتنا في العلاقة (11) ، ان:

$$\int cos\,ax\,dx=\frac{1}{a}sin\,ax+C \qquad .....(4)$$

وباستخدام (4) في (3) ، نجد ان:

$$I=\frac{1}{2}\left\{\frac{sin\,(a-b)x}{a-b}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{sin\,(a+b)x}{a+b}\right\}+C$$

$$=\frac{sin\,(a-b)x}{2(a-b)}+\frac{sin\,(a+b)x}{2(a+b)}+C \qquad .....(5)$$

بشرط ان $a\neq b$, $a\neq -b$ اي بشرط ان $a^2\neq b^2$

من $(1),(5)$ يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{35}\quad \int \sin^n ax \cos ax\, dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sin^n ax \cos ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض ان:

$$u = \sin^n ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \cos ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان:

$$du = an \sin^{n-1} ax \cos ax\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان:

$$v = \frac{1}{a} \sin ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام $(3),(2)$ في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان:

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من $(2),(4),(5)$ على الترتيب في (7) ، نجد ان:

$$I = \sin^n ax \left(\frac{1}{a} \sin ax\right) - \int \left(\frac{1}{a} \sin ax\right)\left(an \sin^{n-1} ax \cos ax\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{a} \sin^{n+1} ax - n \int \sin^n ax \cos ax\, dx \qquad .....(8)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل في الطرف الأيمن من (8) هو التكامل في (1) ، فإن:

$$I + n\, I = \frac{1}{a} \sin^{n+1} ax + C \qquad .....(9)$$

بقسمة الطرفين في (9) على $(n+1)$ ، نجد ان:

$$I = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \qquad ...(10)$$

من $(10),(1)$ يثبت صحة المطلوب.

36

$$\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \;\; ; \;\; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \cos^n ax \;\; \sin ax \, dx \qquad \text{.....}(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض ان:

$$u = \cos^n ax \qquad \text{.....}(2)$$

$$dv = \sin ax \, dx \qquad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان:

$$du = -an \cos^{n-1} ax \;\; \sin ax \;\; dx \qquad \text{.....}(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان:

$$v = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad \text{.....}(5)$$

وباستخدام (3),(2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة التالية:

$$I = \int u \, dv \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان:

$$I = uv - \int v \, du \qquad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5),(4),(2) على الترتيب في (7) ، نجد ان:

$$I = \cos^n ax \left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)\left(-an\cos^{n-1} ax \sin ax \, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\cos^{n+1} ax - n\int \cos^n ax \sin ax \, dx \qquad \text{.....}(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (8) هو التكامل في (1) ، فإن:

$$I + n\,I = -\frac{1}{a}\cos^{n+1} ax + C \qquad \text{.....}(9)$$

بقسمة الطرفين في (9) على $(n+1)$ ، نجد ان:

$$I = -\frac{\cos^{n+1} ax}{a\,(n+1)} + C \qquad \text{.....}(10)$$

من (10),(1) يثبت صحة المطلوب.

$$37 \qquad \int \sec^n ax \ \tan ax \ dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C \ ; \ n \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sec^n ax \ \tan ax \ dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I = \int \sec^{n-1} ax \sec ax \tan ax \ ax \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sec ax) = a \sec ax \ \tan ax \ dx$$

$$\therefore \ \sec ax \tan ax \ dx = \frac{1}{a} d(\sec ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $\sec ax \ \tan ax \ dx$ من (3) في (2) ، نجد أن:

$$I = \int \sec^{n-1} ax \left\{ \frac{1}{a} d(\sec ax) \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \int \sec^{n-1} ax \ d(\sec ax) \qquad .....(4)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (4) على الصورة $\int u^m du$ حيث أن:

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \ ; \ m \neq -1$$

$$\therefore \ I = \frac{1}{a} \left\{ \frac{\sec^{n-1+1}}{n-1+1} \right\} + C$$

$$= \frac{\sec^n ax}{na} + C \qquad .....(5)$$

من (5),(1) يثبت صحة المطلوب.

$$38 \qquad \int \operatorname{cosec}^n ax \cot ax \ dx = -\frac{\operatorname{cosec}^n ax}{na} + C \ ; \ n \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \operatorname{cosec}^n ax \ \cot ax \ dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I=\int cosec^{n-1}ax\ \ cosec\,ax\ \ cot\,ax\ \ dx \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(cosec\,ax)=-a\,cosec\,ax\ \ cot\,ax\ \ dx$$

$$\therefore\ cosec\,ax\ \ cot\,ax\ \ dx=-\frac{1}{a}d(cosec\,ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $cosec\,ax\ \ cot\,ax\ \ dx$ من (3) في (2) ، نجد أن:

$$I=\int cosec^{n-1}ax\left\{-\frac{1}{a}d(cosec\,ax)\right\}$$

$$=-\frac{1}{a}\int cosec^{n-1}ax\,d(cosec\,ax) \qquad .....(4)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (4) على الصورة $\int u^{m}du$ حيث أن:

$$\int u^{m}du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C\ \ ;\ \ m\neq-1$$

$$I=-\frac{1}{a}\left\{\frac{cosec^{n-1+1}}{n-1+1}\right\}+C$$

$$=\frac{-cosec^{n}ax}{na}+C \qquad .....(5)$$

من $(1),(5)$ يثبت صحة المطلوب.

39

$$\text{if } m\neq-n$$

$$\int \sin^{n}ax\cos^{m}ax\,dx=\frac{\sin^{n+1}ax\cos^{m-1}ax}{a(m+n)}+\frac{m-1}{n+m}\int \sin^{n}ax\cos^{m-2}ax\,dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sin^{n}ax\ \ \cos^{m}ax\ \ dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I=\int \cos^{m-1}\ \ \sin^{n}ax\ \ \cos ax\ \ dx \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d(\sin^{n+1}ax)=a(n+1)\sin^{n}ax\ \ \cos ax\ \ dx$$

$$\therefore\ \sin^{n}ax\ \ \cos ax\ \ dx=\frac{1}{a(n+1)}d(\sin^{n+1}ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $sin^n ax \ \ cos ax \ dx$ من (3) في (2) ، نجد أن:

$$I = \int cos^{m-1} ax \ \ \frac{1}{a(n+1)} d\left(sin^{n+1} ax\right)$$

$$= \frac{1}{a(n+1)} \int cos^{m-1} ax \ d\left(sin^{n+1} ax\right)$$

$$= \frac{1}{a(n+1)} I_1 \qquad .....(4)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u = cos^{m-1} ax \qquad .....(5)$$

$$dv = d\left(sin^{n+1} ax\right) \qquad .....(6)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن:

$$du = -a\ (m-1) cos^{m-2} ax \ \ sin ax \ \ dx \qquad .....(7)$$

وبتكامل الطرفين في (6) ، نجد أن:

$$v = sin^{n+1} ax \qquad .....(8)$$

وباستخدام (6),(5) في (4) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u\ dv \qquad .....(9)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (9) ، نجد أن:

$$I_1 = uv - \int v\ du \qquad .....(10)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5),(7),(8) على الترتيب في (10) ، نجد أن:

$$I_1 = cos^{m-1} ax\ sin^{n+1} ax - \int sin^{n+1} ax \left\{-a\ (m-1) cos^{m-2} ax \ \ sin ax\ dx\right\}$$

$$= cos^{m-1} ax \ \ sin^{n+1} ax + a(m-1) \int cos^{m-2} ax \ \ sin^n ax \ \ sin^2 ax\ dx \qquad .....(11)$$

من قوانين حساب المثلثات ، معلوم لدينا أن:

$$sin^2 \theta = 1 - cos^2 \theta \qquad .....(12)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (12) للتعبير عن $sin^2 ax$ في الطرف الأيمن من (11) بدلالة $cos^2 ax$ ، نجد أن:

$$I_1 = cos^{m-1} ax \ \ sin^{n+1} ax + a\ (m-1) \int cos^{m-2} ax \ \ sin^n ax \left(1 - cos^2 ax\right) dx$$

$$= cos^{m-1} ax \ \ sin^{n+1} ax + a\ (m-1) \int cos^{m-2} ax \ \ sin^n ax \ \ dx -$$

$$a\ (m-1) \int cos^m ax \ \ sin^n ax \ \ dx \qquad .....(13)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (13) هو التكامل في (1) ، فإنه يمكننا صياغة (13) في الصورة التالية:

$$I_1 = cos^{m-1} ax \ \ sin^{n+1} ax +$$

$$a\ (m-1) \int cos^{m-2} ax \ \ sin^n ax \ \ dx - a\ (m-1) I \qquad .....(14)$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 من (14) في (4)، نجد أن:

$$I=\frac{\cos^{m-1}ax\ \sin^{n+1}ax}{a\,(n+1)}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}ax\sin^{n}ax\,dx-\frac{m-1}{n-1}I$$

$$\therefore I+\left(\frac{m-1}{m+1}\right)I=\frac{\cos^{m-1}ax\ \sin^{n+1}ax}{a\,(n+1)}+\frac{m-1}{n+1}\int\cos^{m-2}ax\ \sin^{n}ax\ dx$$

بضرب الطرفين في $\frac{n+1}{n+m}$، نجد أن:

$$I=\frac{\cos^{m-1}ax\ \sin^{n+1}ax}{a\,(n+m)}+\frac{m-1}{n+m}\int\cos^{m-2}ax\ \sin^{n}ax\ dx \qquad .....(15)$$

من $(1),(15)$ يثبت صحة المطلوب.

40

$$if\ n\neq -m$$

$$\int\sin^{n}ax\cos^{m}ax\,dx=\frac{-\sin^{n-1}ax\cos^{m+1}ax}{a\,(m+n)}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^{n-2}ax\cos^{m}ax\,dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\sin^{n}ax\cos^{m}ax\,dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I=\int\sin^{n-1}ax\cos^{m}ax\sin ax\,dx \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(\cos^{m+1}ax\right)=-a\,(m+1)\cos^{m}ax\sin ax\,dx$$

$$\therefore\ \cos^{m}ax\sin ax\,dx=\frac{-1}{a\,(m+1)}d\left(\cos^{m+1}ax\right) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $\cos^{m}ax\sin ax\,dx$ من (3) في (2)، نجد أن:

$$I=\int\sin^{n-1}ax\cdot\frac{-1}{a\,(m+1)}d\left(\cos^{m+1}ax\right)$$

$$=\frac{-1}{a(m+1)}\int\sin^{n-1}ax\ d\left(\cos^{m+1}ax\right)$$

$$=\frac{-1}{a(m+1)}I_1 \qquad .....(4)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن:

$$u=\sin^{n-1}ax \qquad .....(5)$$

$$d\,v=d\left(\cos^{m+1}ax\right) \qquad .....(6)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن:

$$du = a(n-1)\sin^{n-2} ax \cos ax\, dx \qquad .....(7)$$

وبتكامل الطرفين في (6) ، نجد أن:

$$v = \int d\left(\cos^{m+1} ax\right) = \cos^{m+1} ax \qquad .....(8)$$

وباستخدام (6) ، (5) في (4) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u dv \qquad .....(9)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (9) ، نجد أن :

$$I_1 = uv - \int v du \qquad .....(10)$$

بالتعويض عن u, du, v من (8) ، (7) ، (5) على الترتيب في (10) ، نجد أن:

$$I_1 = \left(\sin^{n-1} ax\right)\left(\cos^{m+1} ax\right) - \int \left(\cos^{m+1} ax\right) \cdot \left\{a\,(n-1)\sin^{n-2} ax \cos ax\, dx\right\}$$

$$= \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^{m+2} ax\, dx$$

$$= \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx \qquad .....(11)$$

من قوانين حساب المثلثات معلوم لدينا أن:

$$\cos^2 ax = 1 - \sin^2 ax \qquad .....(12)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (12) للتعبير عن $\cos^2 ax$ في الطرف الأيمن من (11) بدلالة $\sin^2 ax$ ، نجد أن:

$$I_1 = \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\left(1 - \sin^2 ax\right)dx$$

$$= \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx +$$

$$a(n-1)\int \sin^{n} ax \cos^{m} ax\, dx \qquad .....(13)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (13) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax - a(n-1)\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx + a(n-1)I \qquad .....(14)$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 من (14) في (4) ، نجد أن :

$$I_1 = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+1)} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx - \frac{n-1}{m+1} I$$

بضرب الطرفين في $\frac{m+1}{m+n}$ ، نجد أن :

$$\left(\frac{m+1}{m+n}\right)I + \left(\frac{n-1}{m+n}\right)I = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+2}\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx$$

$$I_1 = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+2)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^{m} ax\, dx \qquad .....(15)$$

من (15) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

41

$$\int \sin^{-1} ax\, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C \quad ; \quad a^2x^2 \le 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

.....(1)

$$I = \int \sin^{-1} ax\, dx$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان:

.....(2)

$$u = \sin^{-1} ax$$

.....(3)

$$dv = dx$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\sin^{-1} ax\right)$$

.....(4)

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

.....(5)

$$v = x$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

.....(6)

$$I = \int u\, dv$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

.....(7)

$$I = uv - \int v\, du$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) نجد ان :

$$I = \sin^{-1} ax\,(x) - \int x \cdot \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$$

.....(8)

$$= x \sin^{-1} ax - \int \frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$$

بضرب التكامل في الطرف الأيمن في (8) تحت علاقة التكامل في $(-2a)$ وخارج علاقة التكامل في $\left(\frac{-1}{2a}\right)$ ، نجد ان :

.....(9)

$$I = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{2a}\int \frac{-2a^2x}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$$

فإذا لاحظنا بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيسر في *(9)* لوجدنا ان البسط $(-2a^2x)$ هو تفاضل المقدار $(1-a^2x^2)$ الموجود تحت علامة الجذر التربيعي ، أي ان الدالة المتكاملة على الصورة $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u'(x)$ تعني مشتقة $u(x)$ بالنسبة إلى x وحيث ان :

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = 2\sqrt{u(x)}+C \qquad ...(10)$$

وباستخدام *(10)* لحساب التكامل في *(9)* ، نجد ان :

$$\therefore \quad I = x\sin^{-1}ax + \frac{1}{2a}\left\{2\sqrt{1-a^2x^2}\right\}+C$$

$$= x\sin^{-1}ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C \qquad ...(11)$$

من *(11)* ، *(1)* يثبت صحة المطلوب.

42	$\int \cos^{-1}ax\,dx = x\cos^{-1}ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}+C \;;\; a^2x^2 \le 1$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cos^{-1}ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cos^{-1}ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي *(2)* ، نجد ان :

$$du = d\left(\cos^{-1}ax\right)$$

$$= \frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفي في *(3)* ، نجد ان :

$$v = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام *(3)* ، *(2)* في *(1)* نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في *(6)* ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \cos^{-1} ax \cdot (x) - \int x \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}} dx$$

$$= x\cos^{-1} ax - \int \frac{-ax}{\sqrt{1-a^2x^2}} dx \qquad .....(8)$$

بضرب التكامل في الطرف الأيمن في (8) تحت علامة التكامل في $(2a)$ ، وخارج علامة التكامل في $\left(\frac{1}{2a}\right)$ ، نجد ان :

$$I = x\sin^{-1} ax - \frac{1}{2a}\int \frac{-2a^2x}{\sqrt{1-a^2x^2}} dx \qquad .....(9)$$

فإذا لاحظنا بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن في (9) لوجدنا ان البسط $(-2a^2x)$ هو تفاضل المقدار $(1-a^2x^2)$ الموجود تحت علامة الجذر التربيعي ، اي ان الدالة المتكاملة على الصورة $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u'(x)$ تعنى مشتقة $u(x)$ بالنسبة إلى x ، وحيث ان ،

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + C \qquad ...(10)$$

وباستخدام (10) لحساب التكامل في (9) ، نجد ان :

$$I = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{2a}\left\{2\sqrt{1-a^2x^2}\right\} + C$$

$$= x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C \qquad ...(11)$$

من (11) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

43 $$\int \tan^{-1} ax\, dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln\left(1+a^2x^2\right) + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \tan^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \tan^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\tan^{-1} ax\right) = \frac{a}{1+a^2x^2}dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = x \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \tan^{-1} ax \cdot (x) - \int x \cdot \frac{a}{1+a^2x^2}dx$$

$$= x\tan^{-1} ax - \int \frac{ax}{1+a^2x^2}dx \quad .....(8)$$

بضرب التكامل في الطرف الأيمن في (8) تحت علامة التكامل في $(2a)$ وخارج علامة التكامل في $(1/2a)$ ، نجد ان :

$$I = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\int \frac{2a^2x}{1+a^2x^2}dx \quad .....(9)$$

فإذا لاحظنا بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن في (9) لوجدنا ان البسط $(2a^2x)$ هو تفاضل المقدار $(1+a^2x^2)$ الموجود في المقام ، أي أن الدالة المتكاملة على الصورة $\frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث $u'(x)$ تعني مشتقة $u(x)$ بالنسبة إلى x ، وحيث ان :

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C \quad ...(10)$$

وباستخدام (10) لحساب التكامل في (9) ، نجد ان :

$$I = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln\left|1+a^2x^2\right| + C$$

وحيث ان : $1+a^2x^2 > 0$ فإن :

$$\ln\left|1+a^2x^2\right| = \ln\left(1+a^2x^2\right)$$

$$\therefore\quad I = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln\left(1+a^2x^2\right) + C \quad ...(11)$$

من (11) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

44

$$\int \cot^{-1} ax\, dx = x\cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(1+a^2x^2\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \cot^{-1} ax\, dx \quad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cot^{-1} ax \quad .....(2)$$

$$dv = dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\cot^{-1} ax\right) = \frac{-a}{1+a^2x^2}dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = x \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \cot^{-1} ax \cdot (x) - \int x \cdot \frac{-a}{1+a^2x^2}dx$$

$$= x\cot^{-1} ax + \int \frac{ax}{1+a^2x^2}dx \quad .....(8)$$

بضرب التكامل في الطرف الأيمن في (8) تحت علامة التكامل في $(2a)$ وخارج علامة التكامل في $(1/2a)$ ، نجد ان :

$$I = x\cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\int \frac{2a^2x}{1+a^2x^2}dx \quad .....(9)$$

فإذا لاحظنا بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن في (9) لوجدنا أن البسط $(2a^2x)$ هو تفاضل المقدار $(1+a^2x^2)$ الموجود في المقام ، اي ان الدالة المتكاملة على الصورة $\frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث $u'(x)$ تعني مشتقة $u(x)$ بالنسبة إلى x ، وحيث ان :

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + C \quad ...(10)$$

وباستخدام (10) لحساب التكامل في (9) ، نجد ان :

$$I = x\cot^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left|1+a^2x^2\right| + C$$

وحيث ان : $1+a^2x^2>0$ فإن :

$$ln\left|1+a^2x^2\right| = ln\left(1+a^2x^2\right)$$

$$\therefore\ I = x\cot^{-1}ax + \frac{1}{2a}ln\left(1+a^2x^2\right)+C \quad ...(11)$$

من (11) ، (1) يثبت صحة المطلوب.



$$\int \sec^{-1}ax\,dx = x\sec^{-1}ax - \frac{1}{a}ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sec^{-1}ax\,dx \quad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sec^{-1}ax \quad .....(2)$$

$$dv = dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} du &= d\left(\sec^{-1}ax\right) \\ &= \frac{a}{ax\sqrt{a^2x^2-1}}dx \\ &= \frac{1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx \quad .....(4) \end{aligned}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = x \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= \sec^{-1}ax\cdot(x) - \int x\cdot\frac{1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx \\ &= x\sec^{-1}ax - \frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-(1/a)^2}}dx \quad .....(8) \end{aligned}$$

وباستخدام صيغة التكامل (وهي من التكاملات الأساسية ويمكنك الرجوع إلى العلاقة 206):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|+C \qquad ;|x|>|k| \qquad .....(9)$$

وذلك لحساب التكامل في الطرف الأيمن من (8) ، نجد أن :

$$I = x\sec^{-1}ax - \frac{1}{a}\ln\left|x+\sqrt{x^2-(1/a)^2}\right|+C$$

$$= x\sec^{-1}ax - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{ax+\sqrt{a^2x^2-1}}{a}\right|+C$$

$$= x\sec^{-1}ax - \left\{\frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right| - \frac{1}{a}\ln|a|\right\}+C$$

$$= x\sec^{-1}ax - \frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right|+C_1 \qquad ...(10)$$

حيث ؛ $C_1 = C + \frac{1}{a}\ln|a|$

من (10) ، (1) يثبت صحة المطلوب

46

$$\int \operatorname{cosec}^{-1}ax\,dx = x\operatorname{cosec}^{-1}ax + \frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \operatorname{cosec}^{-1}ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \operatorname{cosec}^{-1}ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = d\left(\operatorname{cosec}^{-1}ax\right)$$

$$= \frac{-a}{ax\sqrt{a^2x^2-1}}dx$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=cosec^{-1}ax\cdot(x)-\int x\cdot\frac{-1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx$$

$$=x\,cosec^{-1}ax+\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-(1/a)^2}}dx \qquad .....(8)$$

وباستخدام صيغة التكامل (وهي من التكاملات الأساسية ويمكنك الرجوع إلى العلاقة 206)؛

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}dx=ln\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|+C \qquad ;|x|>|k| \qquad .....(9)$$

وذلك لحساب التكامل في الطرف الأيمن من (8) ، نجد ان :

$$I=x\,cosec^{-1}ax+\frac{1}{a}ln\left|x+\sqrt{x^2-(1/a)^2}\right|+C$$

$$=x\,cosec^{-1}ax+\frac{1}{a}ln\left|\frac{ax+\sqrt{a^2x^2-1}}{a}\right|+C$$

$$=x\,cosec^{-1}ax+\left\{\frac{1}{a}ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right|-\frac{1}{a}ln|a|\right\}+C$$

$$=x\,cosec^{-1}ax+\frac{1}{a}ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-1}\right|+C_1 \qquad ...(10)$$

حيث : $C_1=C-\frac{1}{a}ln|a|$

من (10) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

47

$$\int x^n\,sin^{-1}ax\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}sin^{-1}ax-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \qquad ;\ n\neq-1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x^n\,sin^{-1}ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=sin^{-1}ax \qquad .....(2)$$

$$dv=x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\sin^{-1} ax\right) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \sin^{-1} ax \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \;\; ; \;\; n \neq -1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

48

$$\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \;\; ; \;\; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \cos^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cos^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

.....(6)

$$I=\int u\,dv$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

.....(7)

$$I=uv-\int v\,du$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=\cos^{-1}ax\cdot\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\right)$$

.....(8)

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1}ax+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\quad;\quad n\neq-1$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

49

$$\int x^n\tan^{-1}ax\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1}ax-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx$$

$;\ n\neq-1$

الشرح والحل

لنفترض ان:

.....(1)

$$I=\int x^n\tan^{-1}ax\,dx$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

.....(2)

$$u=\tan^{-1}ax$$

.....(3)

$$dv=x^n dx$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

.....(4)

$$du=\frac{a}{1+a^2x^2}dx$$

وبتكامل الطرفي في (3) ، نجد ان :

.....(5)

$$v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

.....(6)

$$I=\int u\,dv$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

.....(7)

$$I=uv-\int v\,du$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \tan^{-1} ax \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{a}{1+a^2x^2}dx\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx \quad ; \quad n \neq -1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

50

$$\int x^n \cot^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cot^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx \quad ; \quad n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^n \cot^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cot^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\cot^{-1} ax\right)$$

$$= \frac{-a}{1+a^2x^2}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \cot^{-1} ax \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{-a}{1+a^2x^2}dx\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cot^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx \quad ; \quad n \neq -1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

51

$$\int x^n \sec^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} ax - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx \quad ; \; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \sec^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \sec^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = d\left(\sec^{-1} ax\right)$$

$$= \frac{a}{a\sqrt{a^2x^2-1}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) . نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \sec^{-1} ax \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} ax - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx \quad ; \; n \neq -1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{52}\quad \int x^n \operatorname{cosec}^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{cosec}^{-1} ax + \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx \quad ; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^n \operatorname{cosec}^{-1} ax\,dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \operatorname{cosec}^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(\operatorname{cosec}^{-1} ax\right)$$

$$= \frac{-a}{ax\sqrt{a^2x^2-1}}dx$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \operatorname{cosec}^{-1} ax\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{-1}{x\sqrt{a^2x^2-1}}dx\right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{cosec}^{-1} ax + \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx \quad ; \quad n \neq -1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

53

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C \qquad ;a\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int e^{ax}dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$u=e^{ax} \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=a\,e^{ax}\,dx \qquad .....(3)$$

بالتعويض من (2) في (3) عن قيمة e^{ax} بدلالة u ، نجد أن :

$$du=au\,dx \qquad .....(4)$$

من (4) يمكن الحصول على dx في الصورة :

$$dx=\frac{1}{au}du \qquad .....(5)$$

وبالتعويض في (1) عن e^{ax}, dx من (5) ، (2) على الترتيب ، نجد أن :

$$I=\int u\left(\frac{1}{au}du\right)=\frac{1}{a}\int du$$

$$=\frac{1}{a}u+C \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (6) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}+C \qquad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب.

54

$$\int x\,e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C \qquad ;a\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\,e^{ax}dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن :

$$u = x \quad .....(2)$$

$$dv = e^{ax}dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \frac{1}{a}e^{ax} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}dx$$

$$= \frac{x\,e^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}dx \quad .....(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (8) هو التكامل المثبت في العلاقة (53) ، فإن I في (8) يمكن صياغتها في الصورة التالية :

$$I = \frac{x\,e^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{a}e^{ax}\right\} + C$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C \quad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

55

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx \qquad ; a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن.

$$I = \int x^n e^{ax}dx \quad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \quad .....(2)$$

$$dv = e^{ax}dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

.....(4)
$$du = d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx$$

ويتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

.....(5)
$$v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

.....(6)
$$I = \int u\,dv$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

.....(7)
$$I = uv - \int v\,du$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = x^n\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)\cdot n\,x^{n-1}dx$$

.....(8)
$$= \frac{1}{a}x^n\,e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

من (8) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

56

$$\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C \;\;;\;\; b>0\,,\,b\neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

.....(1)
$$I = \int b^{ax}dx$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

.....(2)
$$u = b^{ax}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

.....(3)
$$du = a\,b^{ax}\,\ln b\,dx$$

بالتعويض عن b^{ax} بدلالة u من (2) في (3) ، نجد ان :

.....(4)
$$du = a\,u\ln b\,dx$$

.....(5)
$$\therefore\quad dx = \frac{1}{a\,u\ln b}du$$

بالتعويض عن b^{ax},dx من (5) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int u\cdot\frac{1}{a\,u\ln b}du$$

.....(6)
$$= \frac{1}{a\ln b}\int du$$

$$= \frac{1}{a \ln b} u + C \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (7) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C \qquad .....(8)$$

حيث $b > 0 , b \neq 1$.

من (8) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

57	$\int x^n b^{ax} \, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} \, dx \quad ; \quad b > 0, b \neq 1$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \, b^{ax} \, dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = b^{ax} dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n \, x^{n-1} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3)، [لاحظ أن الطرف الأيمن في (3) هو الدالة المتكاملة في العلاقة (56)]، نجد أن :

$$v = \frac{b^{ax}}{a \ln b} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x^n \left(\frac{b^{ax}}{a \ln b} \right) - \int \frac{b^{ax}}{a \ln b} \left(n \, x^{n-1} dx \right)$$

$$= \frac{x^n \, b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} dx \qquad .....(8)$$

حيث $b > 0 , b \neq 1$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

58

$$\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \ln ax\, dx \qquad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \ln ax \qquad \text{.....(2)}$$
$$dv = dx \qquad \text{.....(3)}$$

بإجراء التفاضل لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{ax}(a)dx$$
$$= \frac{1}{x}dx \qquad \text{.....(4)}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = x \qquad \text{.....(5)}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad \text{.....(6)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad \text{.....(7)}$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \ln ax \cdot (x) - \int x\left(\frac{1}{x}dx\right)$$
$$= x \ln ax - \int dx$$
$$= x \ln ax - x + C \qquad \text{.....(8)}$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

59

$$\int (\ln ax)^n dx = x(\ln ax)^n - n\int (\ln ax)^{n-1} dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int (\ln ax)^n dx \qquad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن:

$$u = (\ln ax)^n \qquad \text{..... (2)}$$

$$dv = dx \qquad \text{..... (3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n(\ln ax)^{n-1} \cdot \frac{1}{ax} \cdot a\, dx$$

$$= \frac{n(\ln ax)^{n-1}}{x} dx \qquad \text{..... (4)}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = x \qquad \text{..... (5)}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad \text{..... (6)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad \text{..... (7)}$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = (\ln ax)^n \cdot x - \int \frac{xn\,(\ln ax)^{n-1}}{x} dx$$

$$= x\,(\ln ax)^n - n\int (\ln ax)^{n-1} dx \qquad \text{..... (8)}$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

60

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\ln ax}{x} dx \qquad \text{..... (1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \ln ax \qquad \text{..... (2)}$$

$$dv = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{a}{ax}dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{ax}(a)dx$$

$$= \frac{1}{x}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \ln ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \ln ax \cdot \ln ax - \int \ln ax \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= (\ln ax)^2 - \int \frac{\ln ax}{x}dx \qquad .....(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (8) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I = \ln(ax)^2 - I + C$$

$$2I = (\ln ax)^2 + C$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

61

$$\int \frac{(\ln ax)^n}{x} dx = \frac{(\ln ax)^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{(\ln ax)^n}{x} dx = \int (\ln ax)^n \frac{1}{x} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$u = \ln ax \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = d(\ln ax)$$

$$= \frac{1}{ax} a \, dx$$

$$= \frac{1}{x} dx \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x}dx$, $\ln ax$ من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int u^n \, du$$

$$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1 \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (4) ، نجد أن :

$$I = \frac{(\ln ax)^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1 \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

62

$$\int \frac{(\ln ax)^n}{x^m} dx = -\frac{1}{m-1} \left\{ \frac{(\ln ax)^n}{x^{m-1}} - n \int \frac{(\ln ax)^{n-1}}{x^m} dx \right\} \quad ; \; m \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{(\ln ax)^n}{x^m} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = (\ln ax)^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{x^m} dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = n\,(\ln ax)^{n-1} \frac{1}{ax} a\, dx$$

$$= \frac{n(\ln ax)^{n-1}}{x} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \frac{1}{x^m} dx$$

$$= \int x^{-m} dx$$

$$= \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)x^{m-1}} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) و (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\ln ax)^n \left\{ -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} \right\} - \int \left\{ -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} \right\} \frac{n\,(\ln ax)^{n-1}}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{m-1} \frac{(\ln ax)^n}{x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln ax)^{n-1}}{x^m} dx$$

$$= -\frac{1}{m-1} \left\{ \frac{(\ln ax)^n}{x^{m-1}} - n \int \frac{(\ln ax)^{n-1}}{x^m} dx \right\} \quad ; \; m \neq 1 \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int \frac{1}{x \ln ax} dx = \ln|\ln ax| + C$$ 63

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x \ln ax} dx$$

$$= \int \frac{1}{\ln ax} \cdot \frac{1}{x} dx \quad \text{..... (1)}$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$u = \ln ax \quad \text{..... (2)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{ax} a\, dx = \frac{1}{x} dx \quad \text{..... (3)}$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x}dx$, $\ln ax$ من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{u} du \quad \text{..... (4)}$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن من (4) نستخدم العلاقة (1) ، نجد أن :

$$I = \ln|u| + C \quad \text{..... (5)}$$

بالتعويض عن u من (2) في (5) ، نجد أن :

$$I = \ln|\ln ax| + C \quad \text{..... (6)}$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int \frac{1}{x(\ln ax)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}} + C \; ; \; n \neq 1$$ 64

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x(\ln ax)} dx \quad \text{..... (1)}$$

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في a ، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{(\ln ax)^n}\cdot\frac{1}{ax}a\,dx \qquad .....(2)$$

فإذا لاحظنا في (2) أن :

$$\frac{1}{ax}a\,dx=d(\ln ax)$$

$$I=\int \frac{1}{(\ln ax)^n}d(\ln ax)$$

$$=\int (\ln ax)^{-n}d(\ln ax) \qquad .....(3)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (3) يمكن حسابه باستخدام العلاقة :

$$\int z^n\,dz=\frac{z^{n+1}}{n+1}+C \quad ;\ n\neq -1$$

$$I=\frac{(\ln ax)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

$$=-\frac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}+C \qquad .....(4)$$

من (4) و (1) يثبت صحة المطلوب.

65 $$\int x\ln ax\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln ax-\frac{1}{4}x^2+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\ln ax\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\ln ax \qquad .....(2)$$
$$dv=x\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=\frac{1}{ax}(a)dx$$
$$=\frac{1}{x}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفي في (3) ، نجد أن :

$$v=\frac{1}{2}x^2 \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \ln ax \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln ax - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln ax - \frac{1}{4}x^2 + C \quad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

66

$$\int x^n \ln ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \;\; ; \;\; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \ln ax\,dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \ln ax \quad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{ax}\cdot a\,dx = \frac{1}{x}dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفي في (3) ، نجد أن :

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \ln ax \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

67

$$\int x^m (\ln ax)^n dx = \frac{1}{m+1}\left\{ x^{m+1} (\ln ax)^n - n \int x^m (\ln ax)^{n-1} dx \right\} \quad ; \ m \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^m (\ln ax)^n dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = (\ln ax)^n \qquad .....(2)$$

$$dv = x^m dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = n (\ln ax)^{n-1} \cdot \frac{1}{ax} a \, dx$$

$$= \frac{n (\ln ax)^{n-1}}{x} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int x^m dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=(\ln ax)^{n}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)-\int\frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{n(\ln ax)^{n-1}}{x}dx$$

$$=\frac{1}{m+1}\left\{x^{m+1}(\ln ax)^{n}-n\int x^{m}(\ln ax)^{n-1}dx\right\} \quad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

68

$$\int\frac{x^{m}}{(\ln ax)^{n}}dx=\frac{-1}{n-1}\left\{\frac{x^{m+1}}{(\ln ax)^{n-1}}-(m+1)\int\frac{x^{m}}{(\ln ax)^{n-1}}dx\right\}\ ;\ n\neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int\frac{x^{m}}{(\ln ax)^{n}}dx \quad .....(1)$$

بضرب دالة التكامل في (1) بسطا ومقاما في x ، نجد ان :

$$I=\int\frac{x^{m+1}}{(\ln ax)^{n}}\cdot\frac{dx}{x} \quad .....(2)$$

لحساب I في (2) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=x^{m+1} \quad .....(3)$$

$$dv=\frac{1}{(\ln ax)^{n}}\cdot\frac{dx}{x} \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$du=(m+1)x^{m}dx \quad .....(5)$$

وبتكامل الطرفين في (4) ، نجد ان :

$$v=\int\frac{1}{(\ln ax)^{n}}\cdot\frac{dx}{x} \quad .....(6)$$

بضرب دالة التكامل في (6) بسطا ومقاما في a ، نجد ان :

$$v=\int\frac{1}{(\ln ax)^{n}}\cdot\frac{a\,dx}{ax} \quad .....(7)$$

فإذا لاحظنا في (7) أن :

$$\frac{a\,dx}{ax}=d\,(\ln ax)$$

$$v=\int \frac{1}{(\ln ax)^{n}}\,d\,(\ln ax)$$

$$=\int (\ln ax)^{-n}\,d\,(\ln ax) \qquad .....(8)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (8) يمكن حسابه باستخدام العلاقة :

$$\int z^{n}dx=\frac{z^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \; n\neq -1$$

$$v=\frac{(\ln ax)^{-n+1}}{-n+1}$$

$$=-\frac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}} \qquad .....(9)$$

باستخدام (4) ، (3) في (2) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad ...(10)$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (10) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن u,du,v من (9) ، (5) ، (3) على الترتيب في (11) ، نجد ان :

$$I=\left(x^{m+1}\right)\left\{-\frac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}\right\}-\int \left\{-\frac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}\right\}(m+1)x^{m}dx$$

$$=-\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}+\frac{(m+1)}{(n-1)}\int \frac{x^{m}}{(\ln ax)^{n-1}}dx$$

$$=-\frac{1}{n-1}\left\{\frac{x^{m+1}}{(\ln ax)^{n-1}}-(m+1)\int \frac{x^{m}}{(\ln ax)^{n-1}}dx\right\} \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$69 \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a \sin bx - b \cos bx\} + C \quad ; a \neq 0, b \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = e^{ax} \quad .....(2)$$

$$dv = \sin bx \, dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = e^{ax} \cdot a \, dx$$
$$= a \, e^{ax} \, dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \sin bx \, dx$$
$$= -\frac{1}{b} \cos bx \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u \, dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v \, du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos bx\right) - \int \left(-\frac{1}{b} \cos bx\right) \cdot a \, e^{ax} \, dx$$
$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$
$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I_1 \quad .....(8)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx \quad .....(9)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = e^{ax} \quad ...(10)$$

$$dv_1 = \cos bx \, dx \quad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = d\left(e^{ax}\right)$$
$$= a\, e^{ax}\, dx \qquad \ldots(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \cos bx\, dx$$
$$= \frac{1}{b}\sin bx \qquad \ldots(13)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \qquad \ldots(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 \qquad \ldots(15)$$

بالتعويض عن u_1, du, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx\right) - \int \left(\frac{1}{b}\sin bx\right)\left(a\, e^{ax} dx\right)$$
$$= \frac{1}{b} e^{ax}\, \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx \qquad \ldots(16)$$

فإذا لاحظنا في (16) أن التكامل في الطرف الأيمن هو التكامل في (1) فإن :

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I + C \qquad \ldots(17)$$

بالتعويض عن I_1 من (17) في (8) ، نجد ان :

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax}\, \cos bx + \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b} e^{ax}\, \sin bx - \frac{a}{b} I\right\} + C$$
$$= \frac{a}{b^2} e^{ax}\, \sin bx - \frac{1}{b} e^{ax}\, \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C \qquad \ldots(18)$$

بضرب طرفي (18) في b^2 ، نجد ان :

$$b^2 I = a\, e^{ax} \sin bx - b\, e^{ax} \cos bx - a^2 I + C$$
$$\left(a^2 + b^2\right) I = e^{ax}\left(a \sin bx - b \cos bx\right) + C$$
$$\therefore \qquad I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \sin bx - b \cos bx\right) + C \qquad \ldots(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos bx+b\sin bx\}+C\quad ;a\neq 0,b\neq 0$$ {70}

الشرح والحل

لنفترض ان:

.....(1)
$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

.....(2)
$$u=e^{ax}$$
.....(3)
$$dv=\cos bx\,dx$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du=e^{ax}\cdot a\,dx$$
.....(4)
$$=a\,e^{ax}dx$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v=\int \cos bx\,dx$$
.....(5)
$$=\frac{1}{b}\sin bx$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

.....(6)
$$I=\int u\,dv$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

.....(7)
$$I=uv-\int v\,du$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=e^{ax}\cdot\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)-\int \frac{1}{b}\sin bx\cdot a\,e^{ax}dx$$
$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$
.....(8)
$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}I_1$$

حيث افترضنا ان :

.....(9)
$$I_1=\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

...(10)
$$u_1=e^{ax}$$

$$dv_1 = \sin bx\, dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد أن :

$$du_1 = e^{ax} \cdot a\, dx$$
$$= a\, e^{ax} dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1 = \int \sin bx\, dx$$
$$= \frac{-1}{b} \cos bx \qquad ...(13)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد أن :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد أن :

$$I_1 = e^{ax} \cdot \left(-\frac{1}{b} \cos bx \right) - \int \left(-\frac{1}{b} \cos bx \right) \cdot a\, e^{ax}\, dx$$
$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا في (16) أن التكامل في الطرف الأيمن هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I + C \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن I_1 من (17) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \left\{ -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I \right\} + C$$
$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C \qquad ...(18)$$

بضرب طرفي (18) في b^2 ، نجد أن :

$$b^2 I = b\, e^{ax} \sin bx + a\, e^{ax} \cos bx - a^2 I + C$$
$$\left(a^2 + b^2\right) I = e^{ax} \left(a \cos bx + b \sin bx\right) + C$$
$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \cos bx + b \sin bx\right) + C \qquad ...(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

71

$$\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sinh ax\, dx \qquad .....(1)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\cosh ax) = a \sinh ax\, dx$$

$$\therefore \quad \sinh ax\, dx = \frac{1}{a} d(\cosh ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\sinh ax\, dx$ من (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a} d(\cosh ax)$$

$$= \frac{1}{a}\int d(\cosh ax)$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax + C \qquad .....(3)$$

من (3) و (1) يثبت صحة المطلوب.

72

$$\int \sinh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sinh^2 ax\, dx \qquad .....(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$\cosh 2\theta = 1 + 2\sinh^2 \theta$$

$$\therefore \quad \sinh^2 \theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1) \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{2}(\cosh 2ax - 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cosh 2ax\, dx - \frac{1}{2}\int dx \quad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\sinh 2ax) = 2a \cosh 2ax\, dx$$

$$\therefore \quad \cosh 2ax\, dx = \frac{1}{2a} d(\sinh 2ax) \quad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة $\cosh 2ax\, dx$ من (4) في (3) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2a} d(\sinh 2ax) - \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{4a}\int d(\sinh 2ax) - \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C \quad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

73

$$\int \sinh^n ax\, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\, dx \; ; \; n \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sinh^n ax\, dx \quad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int \sinh^{n-1} ax \sinh ax\, dx \quad .....(2)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sinh^{n-1} ax \quad .....(3)$$

$$dv = \sinh ax\, dx \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$du = a(n-1)\sinh^{n-2} ax \cosh ax\, dx \quad .....(5)$$

وبتكامل الطرفين في (4) ، نجد ان :

$$v=\int \sinh ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\cosh ax \qquad .....(6)$$

وباستخدام (4) ، (3) في (2) نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(7)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (7) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن u,du,v من (6) ، (5) ، (3) على الترتيب في (8) ، نجد ان :

$$I=\sinh^{n-1}ax\cdot\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)-\int \frac{1}{a}\cosh ax\cdot a\,(n-1)\sinh^{n-2}ax\cosh ax\,dx$$

$$=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh ax}{a}-(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\cosh^{2}ax\,dx \qquad .....(9)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$\cosh^{2}\theta-\sinh^{2}\theta=1$$

$$\therefore \qquad \cosh^{2}\theta=1+\sinh^{2}\theta \qquad ...(10)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (10) في (9) ، نجد ان :

$$I=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh ax}{a}-(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\left(1+\sinh^{2}ax\right)dx$$

$$=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh ax}{a}-(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\,dx-(n-1)\int \sinh^{n}ax\,dx \qquad ...(11)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل الأخير في الطرف الأيمن هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I=\frac{\sinh^{n-1}\cosh ax}{a}-(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\,dx-(n-1)I \qquad ...(12)$$

$$I+(n-1)I=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh ax}{a}-(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\,dx$$

$$I=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh ax}{na}-\frac{(n-1)}{n}\int \sinh^{n-2}ax\,dx \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{74} \quad \int x \sinh ax\, dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x \sinh ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x \qquad .....(2)$$

$$dv = \sinh ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = x\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right) - \int \frac{1}{a}\cosh ax\, dx \qquad .....(8)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\sinh ax) = a \cosh ax\, dx$$

$$\therefore \quad \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} d\,(\sinh ax) \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cosh ax\, dx$ من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\int d\,(\sinh ax)$$

$$= \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{75}\quad \int x^n \sinh ax\, dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\, dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \sinh ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \sinh ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n\, x^{n-1} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x^n\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right) - \int \frac{1}{a}\cosh ax \cdot n\, x^{n-1} dx$$

$$= \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\, dx \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b}-\frac{e^{-bx}}{a-b}\right\}+C \qquad (76)$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int e^{ax}\sinh bx\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=e^{ax} \qquad .....(2)$$
$$dv=\sinh bx\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du=a\,e^{ax}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v=\int \sinh bx\,dx$$
$$=\frac{1}{b}\cosh bx \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\cosh bx\right)-\int\left(\frac{1}{b}\cosh bx\right)\cdot a\,e^{ax}dx$$
$$=\frac{1}{b}e^{ax}\cosh bx-\frac{a}{b}I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1=\int e^{ax}\cosh bx\,dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1=e^{ax} \qquad ...(10)$$
$$dv_1=\cosh bx\,dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1=a\,e^{ax}dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \cosh bx \, dx \qquad ...(13)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\left(\sinh bx\right) = b \cosh bx \, dx$$

$$\therefore \qquad \cosh bx \, dx = \frac{1}{b} d\left(\sinh bx\right) \qquad ...(14)$$

بالتعويض عن قيمة $\cosh bx \, dx$ من (14) في (13) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \frac{1}{b} d\left(\sinh ax\right) = \frac{1}{b} \sinh bx \qquad ...(15)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1 \, dv_1 \qquad ...(16)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (16) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1 \, du_1 \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (15) ، (12) ، (10) على الترتيب في (17) ، نجد ان :

$$I_1 = e^{ax}\left(\frac{1}{b} \sinh bx\right) - \int \frac{1}{b} \sinh bx \cdot a \, e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sinh bx \, dx \qquad ...(18)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل في الطرف الأيمن في (18) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b} I \qquad ...(19)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (19) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b} I\right\} + C$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \sinh bx + \frac{a^2}{b^2} I + C$$

$$I - \frac{a^2}{b^2} I = \frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \sinh bx + C \qquad ...(20)$$

بضرب طرفي (20) في b^2 ، نجد ان :

$$b^2 I - a^2 I = b \, e^{ax} \cosh bx - a \, e^{ax} \sinh bx + C$$

$$\left(b^2 - a^2\right) I = e^{ax}\left(b \cosh bx - a \sinh bx\right) + C \qquad ...(21)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$\sinh bx = \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2} \qquad ...(22)$$

$$\cosh bx = \frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2} \qquad ...(23)$$

بالتعويض عن $\sin bx$, $\cosh bx$ من $(22),(23)$ على الترتيب في (21) ، نجد أن :

$$\left(b^2-a^2\right)I = e^{ax}\left\{b\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}-a\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}\right\}+C \qquad ...(24)$$

بضرب الطرفين في (-1) ، نجد أن :

$$\left(a^2-b^2\right)I = e^{ax}\left\{a\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}-b\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}\right\}+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{2}\left\{a\,e^{bx}-a\,e^{-bx}-b\,e^{bx}-b\,e^{-bx}\right\}+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{2}\left\{e^{bx}(a-b)-e^{-bx}(a+b)\right\}+C$$

بالقسمة على $\left(a^2-b^2\right)$:

$$I=\frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b}-\frac{e^{-bx}}{a-b}\right\}+C \qquad ...(25)$$

من (25) و (I) يثبت صحة المطلوب.

77

$$\int \cosh ax\,dx=\frac{1}{a}\sinh ax+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \cosh ax\,dx \qquad .....(1)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\sinh ax\right)=a\cosh ax\,dx$$

$$\therefore \quad \cosh ax\,dx=\frac{1}{a}d\left(\sinh ax\right) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\cosh ax\,dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{a}d\left(\sinh ax\right)$$

$$=\frac{1}{a}\int d\left(\sinh ax\right)$$

$$=\frac{1}{a}\sinh ax+C \qquad .....(3)$$

من (3) و (I) يثبت صحة المطلوب.

78

$$\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh^2 ax\,dx \qquad \text{.....}(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\cosh 2ax = 2\cosh^2 ax - 1$$

$$\therefore \quad \cosh^2 ax = \frac{1}{2}(\cosh 2ax + 1) \qquad \text{.....}(2)$$

بالتعويض عن $\cosh^2 ax$ من المتطابقة الزائدية (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{2}(\cosh 2ax + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cosh 2ax\,dx + \frac{1}{2}\int dx \qquad \text{.....}(3)$$

وباستخدام العلاقة (77) لحساب التكامل $\int \cosh 2ax\,dx$ في الطرف الأيمن من (3) ، نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sinh 2ax}{2a}\right\} + \frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C \qquad \text{.....}(4)$$

من (4) و (1) يثبت صحة المطلوب.

79

$$\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx \quad ; \quad n \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh^n ax\,dx \qquad \text{.....}(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int \cosh^{n-1} ax \cosh ax\,dx \qquad \text{.....}(2)$$

لحساب I في (2) ، سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cosh^{n-1} ax \quad .....(3)$$
$$dv = \cosh ax\, dx \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$du = a(n-1)\cosh^{n-2} ax \sinh ax\, dx \quad .....(5)$$

وبتكامل الطرفين في (4) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax\, dx$$
$$= \frac{1}{a}\sinh ax \quad .....(6)$$

باستخدام (4) ، (3) في (2) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \quad .....(7)$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (7) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \quad .....(8)$$

بالتعويض عن u,du,v من (6) ، (5) ، (3) على الترتيب في (8) ، نجد ان :

$$I = \cosh^{n-1} ax\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)\cdot a(n-1)\cosh^{n-2} ax \sinh ax\, dx$$
$$= \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{a} - (n-1)\int \cosh^{n-2} ax \sinh^2 ax\, dx$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh^2 ax = \cosh^2 ax - 1$$
$$\therefore I = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{a} - (n-1)\int \cosh^{n-2} ax\left(\cosh^2 ax - 1\right)dx$$
$$= \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{a} + (n-1)\int \cosh^{n-2} ax\, dx - (n-1)\int \cosh^n ax dx \quad ...... (9)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن من (9) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{a} + (n-1)\int \cosh^{n-2} ax\, dx - (n-1)I$$

$$I + (n-1)I = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{a} + (n-1)\int \cosh^{n-2} ax\, dx \quad ...(10)$$

بقسمة طرفي (10) على n ، نجد ان :

$$I = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\, dx \quad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int x\cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C \qquad (80)$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x\cosh ax\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh ax\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = x\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) - \int\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)dx$$

$$= \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a}\int \sinh ax\,dx$$

$$= \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

81

$$\int x^n \cosh ax\, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax\, dx$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^n \cosh ax\, dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x^n \qquad \text{.....}(2)$$

$$dv = \cosh ax\, dx \qquad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضل لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = n\, x^{n-1} dx \qquad \text{.....}(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \qquad \text{.....}(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int u\, dv \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6)، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = x^n \left(\frac{1}{a} \sinh ax \right) - \int \left(\frac{1}{a} \sinh ax \right) \cdot n\, x^{n-1} dx$$

$$= \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax\, dx \qquad \text{.....}(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{82} \quad \int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b}+\frac{e^{-bx}}{a-b}\right\}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int e^{ax}\cosh bx\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = e^{ax} \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh bx\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = a\,e^{ax}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}\sinh bx \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sinh bx\right) - \int\left(\frac{1}{b}\sinh bx\right)\cdot a\,e^{ax}dx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sinh bx - \frac{a}{b}I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int e^{ax}\sinh bx\,dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = e^{ax} \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \sinh bx\,dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = a\,e^{ax}dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1 = \int \sinh bx\, dx$$

$$= \frac{1}{b} \cosh bx \qquad ...(13)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1\, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\cosh bx\right) - \int \left(\frac{1}{b}\cosh bx\right) \cdot a\, e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \cosh bx\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b} I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b} e^{ax} \cosh bx - \frac{a}{b} I\right\} + C$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cosh bx + \frac{a^2}{b^2} I + C$$

$$I - \frac{a^2}{b^2} I = \frac{1}{b} e^{ax} \sinh bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cosh bx + C \qquad ...(18)$$

بضرب طرفي (18) في $\left(-b^2\right)$ ، نجد ان :

$$a^2 I - b^2 I = a\, e^{ax} \cosh bx - b\, e^{ax} \sinh bx + C$$

$$\left(a^2 - b^2\right) I = e^{ax}\left\{a \cosh bx - b \sinh bx\right\} + C \qquad ...(19)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$\sinh bx = \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{2} \qquad ...(20)$$

$$\cosh bx = \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{2} \qquad ...(21)$$

بالتعويض عن $\sinh bx, \cosh bx$ من $(21), (20)$ على الترتيب في (19) ، نجد ان :

$$\left(a^2-b^2\right)I=e^{ax}\left\{a\cdot\frac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}-b\cdot\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}\right\}+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{2}\left\{a\,e^{bx}+a\,e^{-bx}-b\,e^{bx}+b\,e^{-bx}\right\}+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{2}\left\{e^{bx}(a-b)+e^{-bx}(a+b)\right\} \qquad ...(22)$$

بقسمة طرفي (22) على a^2-b^2 ، نجد ان :

$$I=\frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{e^{-bx}(a+b)}{a^2-b^2}\right\}+C$$

$$=\frac{e^{ax}}{2}\left\{\frac{e^{bx}}{a+b}+\frac{e^{-bx}}{a-b}\right\}+C \qquad ...(23)$$

من (23) و (1) يثبت صحة المطلوب.

83

$$\int \tanh ax\,dx=\frac{1}{a}\ln(\cosh ax)+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \tanh ax\,dx \qquad .....(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\tanh ax=\frac{\sinh ax}{\cosh ax} \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{\sinh ax\,dx}{\cosh ax} \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\,(\cosh ax)=a\sinh ax\,dx$$

$$\therefore \sinh ax\,dx=\frac{1}{a}d\,(\cosh ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $\sinh ax\,dx$ من (4) في (3) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{d\,(\cosh ax)}{\cosh ax} \qquad .....(5)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (5) على الصورة $\int \frac{du}{u}$ وحيث ان :

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

$$I = \frac{1}{a} \ln |\cosh ax| + C \qquad .....(6)$$

وحيث أن مجال تعريف الدالة $\cosh ax$ هو $1 \le x \le \infty$ أي ان الدالة $\cosh ax$ دائما موجبة أو تساوي الصفر ، ولذا فإن :

$$|\cosh ax| = \cosh ax \qquad .....(7)$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{a} \ln (\cosh ax) + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

84

$$\int \tanh^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \tanh^2 ax\, dx \qquad .....(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$1 - \tanh^2 ax = \operatorname{sech}^2 ax$$

$$\therefore\ \tanh^2 ax = 1 - \operatorname{sech}^2 ax \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\tanh^2 ax$ من (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int (1 - \operatorname{sech}^2 ax) dx$$

$$= \int dx - \int \operatorname{sech}^2 ax\, dx \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\tanh ax) = a \operatorname{sech}^2 ax\, dx$$

$$\therefore\ \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{1}{a} d(\tanh ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $\operatorname{sech}^2 ax\, dx$ من (4) في (3) ، نجد ان :

$$I = \int dx - \int \frac{1}{a} d(\tanh ax)$$

$$= \int dx - \frac{1}{a}\int d\left(\tanh ax\right)$$

$$= x - \frac{1}{a}\tanh ax + C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{85} \qquad \int \tanh^n ax\, dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\, dx \quad ; \quad n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \tanh^n ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int \tanh^{n-2} ax \ \tanh^2 ax\, dx \qquad .....(2)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$1 - \tanh^2 ax = \operatorname{sech}^2 ax$$

$$\therefore \ \tanh^2 ax = 1 - \operatorname{sech}^2 ax \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $\tanh^2 ax$ من (3) في (2) ، نجد ان :

$$I = \int \tanh^{n-2} ax\left(1 - \operatorname{sech}^2 ax\right)dx$$

$$= \int \tanh^{n-2} ax\, dx - \int \tanh^{n-2} ax\, \operatorname{sech}^2 ax\, dx \qquad .....(4)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\left(\tanh ax\right) = a\, \operatorname{sech}^2 ax\, dx$$

$$\therefore \ \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{1}{a} d\left(\tanh ax\right) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $\operatorname{sech}^2 ax\, dx$ من (5) في (4) ، نجد ان :

$$I = \int \tanh^{n-2} ax\, dx - \int \tanh^{n-2} ax \cdot \frac{1}{a} d\left(\tanh ax\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\int \tanh^{n-2} ax\, d\left(\tanh ax\right) + \int \tanh^{n-2} ax\, dx \qquad .....(6)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن من (6) على الصورة $\int u^m du$ ، وحيث ان :

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad ; \; m \neq -1$$

$$\therefore \; I = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx \qquad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب.

86

$$\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \coth ax \, dx \qquad .....(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\coth ax = \frac{1}{\tanh ax} = \frac{\cosh ax}{\sinh ax} \qquad .....(2)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\cosh ax}{\sinh ax} dx \qquad .....(3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\sinh ax) = a \cosh ax \, dx$$

$$\therefore \; \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} d(\sinh ax) \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $\cosh ax \, dx$ من (4) في (3) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{d(\sinh ax)}{\sinh ax} \qquad .....(5)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن من (5) على الصورة $\int \frac{du}{u}$ ، وحيث أن :

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

$$I = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int coth^2 ax\, dx = x - \frac{1}{a} coth\, ax + C$$ **87**

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int coth^2 ax\, dx \quad ..... (1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$1 - coth^2 ax = -cosech^2 ax$$
$$\therefore\ coth^2 ax = 1 + cosech^2 ax \quad ..... (2)$$

بالتعويض عن قيمة $coth^2 ax$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \left(1 + cosech^2 ax\right) dx$$
$$= \int dx + \int cosech^2 ax\, dx \quad ..... (3)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(coth\, ax\right) = -a\, cosech^2 ax\, dx$$
$$\therefore\ cosech^2 ax\, dx = -\frac{1}{a} d\left(coth\, ax\right) \quad ..... (4)$$

بالتعويض عن $cosech^2 ax\, dx$ من (4) في (3) ، نجد أن :

$$I = \int dx + \int \left\{-\frac{1}{a} d\left(coth\, ax\right)\right\}$$
$$= \int dx - \frac{1}{a}\int d\left(coth\, ax\right)$$
$$= x - \frac{1}{a} coth\, ax + C \quad ..... (5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int coth^n ax\, dx = \frac{-coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int coth^{n-2} ax\, dx \quad ; \quad n \neq 1$$ **88**

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int coth^n ax\, dx \quad ..... (1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية:

$$I=\int coth^{n-2}ax\ coth^2 ax\ dx \qquad .....(2)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$1-coth^2 ax=-cosech^2 ax \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $coth^2 ax$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I=\int coth^{n-2}ax\left(1+cosech^2 ax\right)dx$$

$$=\int coth^{n-2}ax\ dx+\int coth^{n-2}ax\ cosech^2 ax\ dx \qquad .....(4)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(coth\,ax\right)=-a\ cosech^2 ax\ dx$$

$$\therefore\ cosech^2 ax\ dx=-\frac{1}{a}d\left(coth\,ax\right) \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $cosech^2 ax\ dx$ من (5) في (4) ، نجد أن :

$$I=\int coth^{n-2}ax\ dx+\int coth^{n-2}ax\left\{-\frac{1}{a}d\left(coth\,ax\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{a}\int coth^{n-2}ax\ d\left(coth\,ax\right)+\int coth^{n-2}ax\ dx \qquad .....(6)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن من (6) على الصورة $\int u^m du$ ، وحيث أن :

$$\int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C \quad ;\ m\neq -1$$

$$\therefore\ I=\frac{-coth^{n-1}ax}{a\left(n-1\right)}+\int coth^{n-2}ax\ dx \qquad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب.

89

$$\int sech\,ax\ dx=\frac{1}{a}tan^{-1}\left(sinh\,ax\right)+C=\frac{2}{a}tan^{-1}\left(e^{ax}\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int sech\ ax\ dx \qquad .....(1)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$sech\ ax=\frac{1}{cosh\,ax} \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن $sech\ ax$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\cosh ax} dx \quad .....(3)$$

ولإيجاد التكامل في (3) سنستخدم طريقة التعويض ، ولنفترض أن :

$$u = \sinh ax \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد أن :

$$du = a \cosh ax\, dx \quad .....(5)$$

معلوم لدينا المتطابقة الزائدية:

$$\cosh^2 ax = 1 + \sinh^2 ax \quad .....(6)$$

$$\therefore\ \cosh ax = \sqrt{1 + \sinh^2 ax} \quad .....(7)$$

بالتعويض عن $\sinh ax$ من (4) في (7) ، نجد أن :

$$\cosh ax = \sqrt{1 + u^2} \quad .....(8)$$

بالتعويض عن $\cosh ax$ من (8) في (5) ، نجد أن :

$$du = a\sqrt{1 + u^2}\, dx$$

$$\therefore\ dx = \frac{1}{a\sqrt{1+u^2}} du \quad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cosh ax\ , dx$ من (9) ، (8) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{a\sqrt{1+u^2}} du$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} du \quad ...(10)$$

ومن العلاقة (162) اثبتنا ان :

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \qquad ; a \neq 0 \quad ...(11)$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{a} \tan^{-1} u + C \quad ...(12)$$

بالتعويض عن قيمة u من (4) في (12) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} \tan^{-1}(\sinh ax) + C \quad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت أن الطرف الأوسط يساوي الطرف الأيسر.

<u>ولإثبات أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر:</u>

من تعريف دالة جيب التمام الزائدي ، نجد أن :

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \quad ...(14)$$

بالتعويض عن $\cosh ax$ من (14) في (3) ، نجد أن :

$$I=\int\left\{1+\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right\}dx$$

$$=2\int\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}dx \qquad ...(15)$$

بضرب الدالة المتكاملة بسطا ومقاما في $a\,e^{ax}$ ، نجد ان :

$$I=\frac{2}{a}\int\frac{a\,e^{ax}}{e^{2ax}+1}dx$$

$$=\frac{2}{a}\int\frac{a\,e^{ax}dx}{1+\left(e^{ax}\right)^2} \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن من (16) على الصورة $\int\frac{du}{1+u^2}$ ، وباستخدام (11) ، نجد أن :

$$I=\frac{2}{a}\tan^{-1}\left(e^{ax}\right)+C \qquad ...(17)$$

من (17) و (1) يثبت أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

90 $\quad \int sech^2\,ax\,dx=\frac{1}{a}\tanh ax+C$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int sech^2 a x\,dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\tanh ax\right)=a\,sech^2 a x\,dx$$

$$\therefore\ sech^2 a x\,dx=\frac{1}{a}\left(\tanh ax\right) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $sech^2 a x\,dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{a}d\left(\tanh ax\right)$$

$$=\frac{1}{a}\int d\left(\tanh ax\right)$$

$$=\frac{1}{a}\tanh ax+C \qquad .....(3)$$

من (3) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$91 \qquad \int sech^n ax\,dx = \frac{sech^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int sech^{n-2} ax\,dx \quad ; \; n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int sech^n ax\ dx \qquad \text{..... (1)}$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int sech^{n-2} ax\ sech^2 ax\ dx \qquad \text{..... (2)}$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\tanh ax\right) = a\ sech^2 ax\ dx$$

$$\therefore\ sech^2 ax\ dx = \frac{1}{a} d\left(\tanh ax\right) \qquad \text{..... (3)}$$

بالتعويض عن $sech^2 ax\ dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I = \int sech^{n-2} ax \cdot \frac{1}{a} d\left(\tanh ax\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int sech^{n-2} ax\ d\left(\tanh ax\right) \qquad \text{..... (4)}$$

لحساب التكامل في (4) ، سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = sech^{n-2} ax \qquad \text{..... (5)}$$

$$dv = d\left(\tanh ax\right) \qquad \text{..... (6)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$du = -a\left(n-2\right) sech^{n-2} ax\ \tanh ax\ dx \qquad \text{..... (7)}$$

وبتكامل الطرفين في (6) ، نجد أن :

$$v = \int d\left(\tanh ax\right)$$

$$= \tanh ax \qquad \text{..... (8)}$$

وباستخدام (6) ، (5) في (4) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \frac{1}{a}\int u\,dv \qquad \text{..... (9)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (9) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a}\left\{ uv - \int v\,du \right\} \qquad \text{... (10)}$$

بالتعويض عن u,du,v من (8) ، (7) ، (5) على الترتيب في (10) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a}\left\{ sech^{n-2}ax\ \tanh ax+\int \tanh ax\cdot a\,(n-2)sech^{n-2}ax\tanh ax\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}sech^{n-2}ax\tanh ax+(n-2)\int sech^{n-2}ax\tanh^2 ax\,dx \qquad \text{... (11)}$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية ان :

$$1-\tanh^2 ax=sech^2 ax$$

$$\therefore\ \tanh^2 ax=1-sech^2 ax \qquad \text{... (12)}$$

بالتعويض عن $\tanh^2 ax$ من (12) في (11) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a}sech^{n-2}ax\tanh ax+(n-2)\int sech^{n-2}ax\left(1-sech^2 ax\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}sech^{n-2}ax\tanh ax+(n-2)\int sech^{n-2}ax\,dx-(n-2)\int sech^{n}ax\,dx \quad (13)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (13) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I=\frac{1}{a}sech^{n-2}ax\tanh ax+(n-2)\int sech^{n-2}ax\,dx-(n-2)I \qquad \text{... (14)}$$

$$I+(n-2)I=\frac{1}{a}sech^{n-2}ax\tanh ax+(n-2)\int sech^{n-2}ax\,dx$$

$$I=\frac{sech^{n-2}ax\tanh ax}{a\,(n-1)}+\frac{(n-2)}{(n-1)}\int sech^{n-2}ax\,dx \qquad \text{... (15)}$$

من (15) و (1) يثبت صحة المطلوب.

92

$$\int sech^{n}ax\tanh ax\,dx=-\frac{sech^{n}ax}{na}+C\ ;\ n\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int sech^{n}ax\ \tanh ax\,dx \qquad \text{..... (1)}$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I=\int sech^{n-1}ax\cdot sech\,ax\ \tanh ax\,dx \qquad \text{..... (2)}$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\,(sech\,ax)=-a\,sech\,ax\ \tanh ax\,dx$$

$$sech\,ax\ \tanh ax\,dx=-\frac{1}{a}d\,(sech\,ax) \qquad \text{..... (3)}$$

بالتعويض عن $sech\,ax\ \ tanh\,ax\,dx$ من (3) في (2)، نجد أن :

$$I=\int sech^{n-1}ax\cdot\left\{-\frac{1}{a}d\left(sech\,ax\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{a}\int sech^{n-1}ax\ \ d\left(sech\,ax\right) \qquad .....(4)$$

والتكامل في الطرف الأيمن من (4) على الصورة $\int u^m du$ وحيث أن :

$$\int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C \quad ;\ m\neq -1$$

$$I=-\frac{1}{a}\left\{\frac{sech^{n-1+1}ax}{n-1+1}\right\}+C$$

$$=-\frac{sech^n ax}{na}+C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

93

$$\int cosech\ ax\,dx=\begin{cases}\frac{1}{a}ln\left|tanh\frac{ax}{2}\right|+C & ....(i)\\ \frac{1}{a}ln\left|cosech\ ax-coth\,ax\right|+C & ...(ii)\end{cases}$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int cosech\ ax\,dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I=\int \frac{1}{sinh\,ax}dx \qquad .....(2)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$sinh\,ax=2\ sinh\frac{ax}{2}cosh\frac{ax}{2} \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $sinh\,ax$ من (3) في (2)، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{2\ sinh\left(ax/2\right)cosh\left(ax/2\right)}dx \qquad .....(4)$$

بقسمة كل من بسط ومقام الدالة المتكاملة في (4) على $cosh^2\left(ax/2\right)$ ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{1}{\cosh^2(ax/2)}}{\dfrac{\sinh(ax/2)\cosh(ax/2)}{\cosh^2(ax/2)}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{1}{\cosh^2(ax/2)}}{\dfrac{\sinh(ax/2)}{\cosh(ax/2)}}dx \qquad .....(5)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائديتين التاليتين في (5) :

$$\frac{1}{\cosh u}=\operatorname{sech} u \quad , \quad \frac{\sinh u}{\cosh u}=\tanh u$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{sech}^2(ax/2)}{\tanh(ax/2)}dx \qquad .....(6)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (6) بسطا ومقاما في a ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{(a/2)\operatorname{sech}^2(ax/2)dx}{\tanh(ax/2)} \qquad .....(7)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في (7) هو تفاضلة المقام ، فإن التكامل في (7) يكون على الصورة $\int\frac{du}{u}$ ، وحيث ان :

$$\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C \qquad .....(8)$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|+C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة (i) من المطلوب.

__ولإثبات الصيغة (ii) من القانون :__

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في $a\ (\operatorname{cosech} ax-\coth ax)$ ، نجد ان :

$$I=\int\frac{a\operatorname{cosech} ax\ (\operatorname{cosech} ax-\coth ax)}{a\ (\operatorname{cosech} ax-\coth ax)}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{-a\operatorname{cosech} ax\ \coth ax-(-a\operatorname{cosech}^2 ax)}{\operatorname{cosech} ax-\coth ax}dx \qquad ...(10)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في (10) هو تفاضلة المقام ، فإن التكامل في (10) يكون على الصورة $\int\frac{du}{u}$ وباستخدام (8) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosech} ax-\coth ax|+C \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة (ii) من المطلوب.

__لاحظ أن__ : الحالة (ii) يمكن صياغتها في الصورة:

$$\int\operatorname{cosech} ax\ dx=-\frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosech} ax+\coth ax|+C$$

94

$$\int cosech^2 ax\ dx = -\frac{1}{a} coth\, ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cosech^2 ax\ dx \qquad ..... (1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\,(coth\, ax) = -a\ cosech^2 ax\ dx$$

$$cosech^2 ax\ dx = -\frac{1}{a} d\,(coth\, ax) \qquad ..... (2)$$

بالتعويض عن $cosech^2 ax\ dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int -\frac{1}{a} d\,(coth\, ax)$$

$$= -\frac{1}{a} \int d\,(coth\, ax)$$

$$= -\frac{1}{a} coth\, ax + C \qquad ..... (3)$$

من (3) و (1) يثبت صحة المطلوب.

95

$$\int cosech^n ax\ dx = -\frac{cosech^{n-2} ax\ coth\, ax}{a\,(n-1)} - \frac{n-2}{n-1} \int cosech^{n-2} ax\ dx \quad ;\ n \neq 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cosech^n ax\ dx \qquad ..... (1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int cosech^{n-2} ax\ cosech^2 ax\ dx \qquad ..... (2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\,(coth\, ax) = -a\ cosech^2 ax\ dx$$

$$\therefore\ cosech^2 ax = -\frac{1}{a} d\,(coth\, ax) \qquad ..... (3)$$

بالتعويض عن $cosech^2 ax\ dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I = \int cosech^{n-2}ax \cdot \left\{-\frac{1}{a} d\,(\coth ax)\right\}$$
$$= -\frac{1}{a} \int cosech^{n-2}ax \; d\,(\coth ax)$$
$$= -\frac{1}{a} I_1 \qquad .....(4)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int cosech^{n-2}ax \; d\,(\coth ax) \qquad .....(5)$$

ولحساب I_1 في (5) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = cosech^{n-2}ax \qquad .....(6)$$
$$dv = d\,(\coth ax) \qquad .....(7)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (6) ، نجد ان :

$$du = -a\,(n-2)cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax\, dx \qquad .....(8)$$

وبتكامل الطرفين في (7) ، نجد ان :

$$v = \int d\,(\coth ax)$$
$$= \coth ax \qquad .....(9)$$

وباستخدام (7) ، (6) في (5) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u\, dv \qquad ...(10)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (10) ، نجد ان :

$$I_1 = uv - \int v\, du \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن u, du, v من (9) ، (8) ، (6) على الترتيب في (11) نجد ان :

$$I_1 = cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax - \int \coth ax \cdot \left\{-a\,(n-2)cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax\, dx\right\}$$
$$= cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax + a\,(n-2)\int cosech^{n-2}ax \;\; \coth^2 ax\, dx \qquad ...(12)$$

من دراسة الدوال الزائدية معلوم لدينا أن :

$$\coth^2 u - cosech^2 u = 1$$
$$\therefore \;\; \coth^2 u = cosech^2 u + 1 \qquad ...(13)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية (13) في (12) ، نجد ان :

$$I_1 = cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax + a\,(n-2)\int cosech^{n-2}ax\,\left(cosech^2 ax + 1\right)dx$$
$$= cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax +$$
$$a\,(n-2)\int cosech^{n-2}ax\, dx + a\,(n-2)\int cosech^{n}ax \;\; dx \qquad ...(14)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في (14) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = cosech^{n-2}ax \;\; \coth ax + a\,(n-2)\int cosech^{n-2}ax\, dx + a\,(n-2)I \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (15) في (4)، نجد ان :

$$I = -\frac{cosech^{n-2}ax\ coth\,ax}{a} - (n-2)\int cosech^{n-2}ax\,dx - (n-2)I$$

$$I + (n-2)I = -\frac{cosech^{n-2}ax\ coth\,ax}{a} - (n-2)\int cosech^{n-2}ax\,dx \qquad ...(16)$$

باختصار الطرف الأيسر في (16) ثم قسمة الطرفين على $(n-1)$، نجد أن :

$$I = -\frac{cosech^{n-2}ax\ coth\,ax}{a\,(n-1)} - \frac{n-2}{n-1}\int cosech^{n-2}ax\,dx \qquad ...(17)$$

من (17) و (1) يثبت صحة المطلوب.

96

$$\int cosech^{n}ax\ coth\,ax\ dx = -\frac{cosech^{n}\,ax}{na} + C \quad ; \quad n \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int cosech^{n}ax\ coth\,ax\ dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int cosech^{n-1}ax\ cosech\ ax\ coth\,ax\ dx \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\,(cosech\ ax) = -a\ cosech\ ax\ coth\,ax\ dx$$

$$\therefore\ cosech\ ax\ coth\,ax\ dx = -\frac{1}{a}d\,(cosech\ ax) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $cosech\ ax\ coth\,ax\ dx$ من (3) في (2)، نجد أن :

$$I = \int cosech^{n-1}ax \cdot \left\{-\frac{1}{a}d\,(cosech\ ax)\right\}$$

$$= -\frac{1}{a}\int cosech^{n-1}ax\ d\,(cosech\ ax) \qquad .....(4)$$

والتكامل في الطرف الأيمن من (4) على الصورة $\int u^{m}du$ ، وحيث ان :

$$\int u^{m}du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad ; \quad m \neq -1$$

$$I=-\frac{1}{a}\left\{\frac{cosech^{n-1+1}ax}{n-1+1}\right\}+C$$

$$=-\frac{cosech^{n}ax}{na}+C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

97

$$\int \sinh ax \cosh ax\, dx=\frac{\cosh 2ax}{4a}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sinh ax \cosh ax\, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\cosh ax)=a \sinh ax\, dx$$

$$\therefore \sinh ax\, dx=\frac{1}{a}d(\cosh ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن $\sinh ax\, dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \cosh ax\cdot\frac{1}{a}d(\cosh ax)$$

$$=\frac{1}{a}\int \cosh ax\, d(\cosh ax) \qquad .....(3)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (3) على الصورة $\int u\, du$ ، وحيث أن :

$$\int u\, du=\frac{1}{2}u^{2}+C \qquad .....(4)$$

$$I=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{2}\cosh^{2}ax\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2a}\cosh^{2}ax+C \qquad .....(5)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\cosh 2u=2\cosh^{2}u-1$$

$$\cosh^{2}u=\frac{1}{2}(\cosh 2u+1) \qquad .....(6)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية (6) في (5) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{2}(\cosh 2ax+1)\right\}+C$$

$$=\frac{\cosh 2ax}{4a}+\frac{1}{4a}+C$$

$$=\frac{\cosh 2ax}{4a}+C_1 \qquad .....(7)$$

حيث $C_1=\frac{1}{4a}+C$.

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب.

98

$$\int \sinh ax \sinh bx\, dx =$$

$$\frac{1}{a^2-b^2}\{a \sinh bx \cosh ax - b \sinh ax \cosh bx\}+C \qquad ; \quad a^2 \neq b^2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sinh ax \sinh bx\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=\sinh bx \qquad .....(2)$$

$$dv=\sinh ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=b\cosh bx\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v=\int \sinh ax\, dx$$

$$=\frac{1}{a}\cosh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=(\sinh bx)\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)-\int\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)(b\cosh bx\,dx)$$

$$=\frac{1}{a}\sinh bx\cosh ax-\frac{a}{b}\int\cosh ax\cosh bx\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\sinh bx\cosh ax-\frac{b}{a}I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1=\int\cosh ax\cosh bx\,dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في *(9)* سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1=\cosh bx \qquad ...(10)$$

$$dv_1=\cosh ax\,dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي *(10)* ، نجد ان :

$$du_1=b\sinh bx\,dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في *(11)* ، نجد ان :

$$v_1=\int\cosh ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\sinh ax \qquad ...(13)$$

وباستخدام *(11)* ، *(10)* في *(9)* ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1=\int u_1\,dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في *(14)* ، نجد ان :

$$I_1=u_1v_1-\int v_1\,du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من *(13)* ، *(12)* ، *(10)* على الترتيب في *(15)* ، نجد ان :

$$I_1=(\cosh bx)\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)-\int\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)(b\sinh bx\,dx)$$

$$=\frac{1}{a}\sinh ax\cosh bx-\frac{b}{a}\int\sinh ax\sinh bx\,dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل الأخير في الطرف الأيمن في *(16)* هو التكامل في *(1)* ، نجد ان :

$$I_1=\frac{1}{a}\sinh ax\cosh bx-\frac{b}{a}I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من *(17)* في *(8)* ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a}\sinh bx\cosh ax-\frac{b}{a}\left\{\frac{1}{a}\sinh ax\cosh bx-\frac{b}{a}I\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a} \sinh bx \cosh ax - \frac{b}{a^2} \sinh ax \cosh bx + \frac{b^2}{a^2} I + C \qquad ...(18)$$

بضرب طرفي (18) في a^2 ، نجد ان :

$$I a^2 = a \sinh bx \cosh ax - b \sinh ax \cosh bx + b^2 I + C$$

$$\left(a^2 - b^2\right) I = a \sinh bx \cosh ax - b \sinh ax \cosh bx + C$$

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2} \{ a \sinh bx \cosh ax - b \sinh ax \cosh bx \} + C \qquad ...(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

99

$$\int \cosh ax \cosh bx \, dx =$$

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \{ a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax \} + C \quad ; \; a^2 \neq b^2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh ax \cosh bx \, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cosh bx \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh ax \, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = b \sinh bx \, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax \, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \cosh bx \cdot \left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) \cdot b\sinh bx\, dx \qquad .....(8)$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \cosh bx - \frac{b}{a}\int \sinh ax \sinh bx\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \cosh bx - \frac{b}{a} I_1$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \sinh ax \sinh bx\, dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = \sinh bx \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \sinh ax\, dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد أن :

$$du_1 = b\cos bx\, dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \qquad ...(13)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1 dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1\, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = (\sinh bx)\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)(b\cosh bx\, dx)$$

$$= \frac{1}{a}\sinh bx \cosh ax - \frac{b}{a}\int \cosh ax \cosh bx\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، نجد ان :

$$I_1 = \frac{1}{a}\sinh bx \cosh ax - \frac{b}{a} I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a}\sinh ax \cosh bx - \frac{b}{a}\left\{\frac{1}{a}\sinh bx \cosh ax - \frac{b}{a} I\right\} + C$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \cosh bx - \frac{b}{a^2}\sinh bx \cosh ax + \frac{b^2}{a^2} I + C \qquad ...(18)$$

بضرب طرفي (18) في a^2 ، نجد ان :

$$I\,a^2 = a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax + b^2\, I + C$$

$$\left(a^2 - b^2\right) I = a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax + C$$

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\left\{ a \sinh ax \cosh bx - b \sinh bx \cosh ax \right\} + C$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

100	$\int \sinh ax \cosh bx \, dx =$ $\frac{1}{a^2 - b^2}\left\{ a \cosh ax \cosh bx - b \sinh ax \sinh bx \right\} + C \quad ; \; a^2 \neq b^2$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sinh ax \cosh bx \, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sinh ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh bx \, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = a \cosh ax \, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b} \sinh bx \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\sinh ax)\left(\frac{1}{b} \sinh bx\right) - \int \left(\frac{1}{b} \sinh bx\right)(a \cosh ax \, dx)$$

$$= \frac{1}{b} \sinh ax \sinh bx - \frac{a}{b} \int \sinh bx \cosh ax \, dx$$

$$= \frac{1}{b} \sinh ax \sinh bx - \frac{a}{b} I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \sinh bx \cosh ax \, dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u_1 = \cosh ax \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \sinh bx \, dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد أن :

$$du_1 = a \sinh ax \, dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1 = \int \sinh bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b} \cosh bx \qquad ...(13)$$

وباستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1 \, dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد أن :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1 \, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد أن :

$$I_1 = (\cosh ax)\left(\frac{1}{b}\cosh bx\right) - \int \left(\frac{1}{b}\cosh bx\right)(a \sinh ax \, dx)$$

$$= \frac{1}{b}\cosh ax \cosh bx - \frac{a}{b}\int \sinh ax \cosh bx \, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{b}\cosh ax \cosh bx - \frac{a}{b} I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{b}\sinh ax \sinh bx - \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b}\cosh ax \cosh bx - \frac{a}{b} I\right\} + C$$

$$= \frac{1}{b}\sinh ax \sinh bx - \frac{a}{b^2}\cosh ax \cosh bx + \frac{a^2}{b^2} I + C \qquad ...(18)$$

بضرب طرفي (18) في $(-b^2)$ ، نجد أن :

$$-b^2 I = a \cosh ax \cosh bx - b \sinh ax \sinh bx - a^2 I + C$$

$$(a^2 - b^2) I = a \cosh ax \cosh bx - b \sinh ax \sinh bx + C$$

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\{a \cosh ax \cosh bx - b \sinh ax \sinh bx\} + C \qquad ...(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$101 \quad \int \sinh ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a}\{\cosh ax \sin ax - \sinh ax \cos ax\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sinh ax \sin ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sin ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \sinh ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = a \cos ax\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\sin ax)\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)(a \cos ax\, dx)$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \sin ax - \int \cosh ax \cos ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \sin ax - I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \cosh ax \cos ax\, dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = \cos ax \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \cosh ax\, dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = -a \sin ax\, dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1 = \int \cosh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \qquad ...(13)$$

باستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد أن :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1\, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد أن :

$$I_1 = (\cos ax)\left(\frac{1}{a} \sinh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a} \sinh ax\right)(-a \sin ax\, dx)$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \cos ax + \int \sinh ax \sin ax\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{a} \sinh ax \cos ax + I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} \cosh ax \sin ax - \left\{ \frac{1}{a} \sinh ax \cos ax + I \right\} + C$$

$$= \frac{1}{a} \cosh ax \sin ax - \frac{1}{a} \sinh ax \cos ax - I + C$$

$$I + I = \frac{1}{a} \cosh ax \sin ax - \frac{1}{a} \sinh ax \cos ax + C$$

$$I = \frac{1}{2a} \{ \cosh ax \sin ax - \sinh ax \cos ax \} + C \qquad ...(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب.

102 $$\int \sinh ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} \{ \cosh ax \cos ax + \sinh ax \sin ax \} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sinh ax \cos ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cos ax \quad .....(2)$$

$$dv = \sinh ax\, dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = -a \sin ax\, dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \cosh ax \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\cos ax)\left(\frac{1}{a} \cosh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a} \cosh ax\right)(-a \sin ax\, dx) \quad .....(8)$$

$$= \frac{1}{a} \cosh ax \cos ax + \int \cosh ax \sin ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \cosh ax \cos ax + I_1$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \cosh ax \sin ax\, dx \quad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = \sin ax \quad ...(10)$$

$$dv_1 = \cosh ax\, dx \quad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = a \cos ax\, dx \quad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \cosh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \quad ...(13)$$

باستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \quad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1\, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = (\sin ax)\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)(a\cos ax\, dx)$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \sin ax - \int \sinh ax \cos ax\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا ان التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{a}\sinh ax \sin ax - I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a}\cosh ax \cos ax + \left\{ \frac{1}{a}\sinh ax \sin ax - I \right\} + C$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \cos ax + \frac{1}{a}\sinh ax \sin ax - I + C$$

$$I + I = \frac{1}{a}\cosh ax \cos ax + \frac{1}{a}\sinh ax \sin ax + C$$

$$I = \frac{1}{2a}\{ \cosh ax \cos ax + \sinh ax \sin ax \} + C \qquad ...(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب.

103 $$\int \cosh ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a}\{ \sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax \} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \cosh ax \sin ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sin ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = a\cos ax\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax\, dx \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=(\sin ax)\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)-\int\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)(a\cos ax\,dx) \qquad .....(8)$$

$$=\frac{1}{a}\sinh ax\sin ax-\int \sinh ax\cos ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\sinh ax\sin ax-I_1$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1=\int \sinh ax\cos ax\,dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u_1=\cos ax \qquad ...(10)$$

$$dv_1=\sinh ax\,dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد أن :

$$du_1=-a\sin ax\,dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1=\int \sinh ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\cosh ax \qquad ...(13)$$

باستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1=\int u_1\,dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد أن :

$$I_1=u_1v_1-\int v_1\,du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1,du_1,v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد أن :

$$I_1=(\cos ax)\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)-\int\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)(-a\sin ax\,dx)$$

$$=\frac{1}{a}\cosh ax\cos ax+\int \cosh ax\sin ax\,dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{a} \cosh ax \cos ax + I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a} \sinh ax \sin ax - \left\{ \frac{1}{a} \cosh ax \cos ax + I \right\} + C$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \sin ax - \frac{1}{a} \cosh ax \cos ax - I + C$$

$$I + I = \frac{1}{a} (\sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax) + C$$

$$I = \frac{1}{2a} \{ \sinh ax \sin ax - \cosh ax \cos ax \} + C \qquad ...(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب.

104

$$\int \cosh ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \{ \sinh ax \cos ax + \cosh ax \sin ax \} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh ax \cos ax \, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cos ax \qquad .....(2)$$

$$dv = \cosh ax \, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = -a \sin ax \, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int \cosh ax \, dx$$

$$= \frac{1}{a} \sinh ax \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u \, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v \, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\cos ax)\left(\frac{1}{a}\sinh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\sinh ax\right)(-a\sin ax\, dx) \qquad .....(8)$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \cos ax + \int \sinh ax \sin ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax \cos ax + I_1$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int \sinh ax \sin ax\, dx \qquad .....(9)$$

ولحساب I_1 في (9) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u_1 = \sin ax \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \sinh ax\, dx \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = a\cos ax\, dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد ان :

$$v_1 = \int \sinh ax\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \qquad ...(13)$$

باستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1\, dv_1 \qquad ...(14)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1 v_1 - \int v_1\, du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = (\sin ax)\left(\frac{1}{a}\cosh ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\cosh ax\right)(a\cos ax\, dx)$$

$$= \frac{1}{a}\cosh ax \sin ax - \int \cosh ax \cos ax\, dx \qquad ...(16)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (16) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = \frac{1}{a}\cosh ax \sin ax - I \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (17) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a}\sinh ax\cos ax + \left\{\frac{1}{a}\cosh ax\sin ax - I\right\} + C$$

$$= \frac{1}{a}\sinh ax\cos ax + \frac{1}{a}\cosh ax\sin ax - I + C$$

$$I + I = \frac{1}{a}(\sinh ax\cos ax + \cosh ax\sin ax) + C$$

$$I = \frac{1}{2a}\{\sinh ax\cos ax + \cosh ax\sin ax\} + C \qquad \dots(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{105} \qquad \int \sinh^n ax \ \cosh ax \, dx = \frac{\sinh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sinh^n ax \cosh ax \, dx \qquad \dots..(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\sinh ax) = a\cosh ax \, dx$$

$$\cosh ax \, dx = \frac{1}{a} d(\sinh ax) \qquad \dots..(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\cosh ax \, dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \sinh^n ax \cdot \frac{1}{a} d(\sinh ax)$$

$$= \frac{1}{a}\int \sinh^n ax \, d(\sinh ax) \qquad \dots..(3)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (3) على الصورة $\int u^m du$ ، وحيث أن :

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad ; \ m \neq -1$$

$$\therefore \ I = \frac{1}{a}\left\{\frac{\sinh^{n+1} ax}{n+1}\right\} + C$$

$$= \frac{\sinh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \qquad \dots..(4)$$

من (4) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

106

$$\int \cosh^n ax \ \sinh ax \, dx = \frac{\cosh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh^n ax \sinh ax \, dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\cosh ax) = a \sinh ax \, dx$$

$$\therefore \ \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} d(\cosh ax) \qquad .....(2)$$

بالتعويض عن قيمة $\sinh ax \, dx$ من (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \cosh^n ax \cdot \frac{1}{a} d(\cosh ax)$$

$$= \frac{1}{a} \int \cosh^n ax \, d(\cosh ax) \qquad .....(3)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (3) على الصورة $\int u^m du$ ، وحيث أن :

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad ; \ m \neq -1$$

$$\therefore \ I = \frac{1}{a} \left\{ \frac{\cosh^{n+1} ax}{n+1} \right\} + C$$

$$= \frac{\cosh^{n+1} ax}{a(n+1)} + C \qquad .....(4)$$

من (4) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

107

$$\int \sinh^n ax \ \cosh^m ax \, dx = \frac{\cosh^{m-1} ax \ \sinh^{n+1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sinh^n ax \ \cosh^{m-2} ax \, dx \ ; \ m \neq -n$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sinh^n ax \cosh^m ax \, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I=\int \cosh^{m-1} ax \left(\sinh^n ax \cosh ax\, dx\right) \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\sinh^{n+1} ax\right)=a\left(n+1\right)\sinh^n ax \cosh ax\, dx$$

$$\therefore\ \sinh^n ax \cosh ax\, dx=\frac{1}{a\left(n+1\right)}d\left(\sinh^{n+1} ax\right) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $\sinh^n ax \cosh ax\, dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I=\int \cosh^{m-1} ax\cdot\frac{1}{a\left(n+1\right)}d\left(\sinh^{n+1} ax\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(n+1\right)}\int \cosh^{m-1} ax\, d\left(\sinh^{n+1} ax\right)$$

$$=\frac{1}{a\left(n+1\right)}I_1 \qquad .....(4)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1=\int \cosh^{m-1} ax\, d\left(\sinh^{n+1} ax\right) \qquad .....(5)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\cosh^{m-1} ax \qquad .....(6)$$

$$dv=d\left(\sinh^{n+1} ax\right) \qquad .....(7)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (6) ، نجد أن :

$$du=a\left(m-1\right)\cosh^{m-2} ax \sinh ax\, dx \qquad .....(8)$$

وبتكامل الطرفين في (7) ، نجد أن :

$$v=\int d\left(\sinh^{n+1} ax\right)$$

$$=\sinh^{n+1} ax \qquad .....(9)$$

باستخدام (7) ، (6) في (5) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1=\int u\, dv \qquad ...(10)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (10) ، نجد أن:

$$I_1=uv-\int v\, du \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن u,du,v من (9) ، (8) ، (6) على الترتيب في (11) ، نجد أن:

$$I_1=\left(\cosh^{m-1} ax\right)\left(\sinh^{n+1} ax\right)-$$
$$\int\left(\sinh^{n+1} ax\right)\cdot a\left(m-1\right)\cosh^{m-2} ax \sinh ax\, dx$$

$$=\cosh^{m-1} ax \sinh^{n+1} ax-a\left(m-1\right)\int \cosh^{m-2} ax \sinh^{n+2} ax\, dx \qquad ...(12)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\cosh^2 ax - \sinh^2 ax = 1$$

$$\therefore\ \sinh^2 ax = \cosh^2 ax - 1 \qquad \dots (13)$$

بالتعويض عن $\sinh^2 ax$ من (13) في (12) مع ملاحظة أن :

$$\sinh^{n+2} ax = \sinh^n ax \cdot \sinh^2 ax$$

$$\therefore\ I_1 = \cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax - a\,(m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\,\left(\cosh^2 ax - 1\right)dx$$

$$= \cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax + a\,(m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx - a\,(m-1)\int \sinh^n ax\ \cosh^m ax\ dx \qquad \dots (14)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن من (14) هـو التكامل في (I) ، فإن (14) تـأخذ الصورة :

$$I_1 = \cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax + a\,(m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx - a\,(m-1)\,I \qquad \dots (15)$$

بالتعويض عن I_1 من (15) في (4) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a\,(n+1)}\left\{\cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax + a\,(m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx - a\,(m-1)\,I\right\} \qquad \dots (16)$$

بضرب طرفي (16) في $(n+1)$ ، نجد أن :

$$(n+1)\,I = \frac{\cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax}{a} + (m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx - (m-1)\,I \qquad \dots (17)$$

$$(n+1)\,I + (m-1)\,I = \frac{\cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax}{a} + (m-1)\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx \qquad \dots (18)$$

فإذا لاحظنا في الطرف الأيسر أن $(n+1)I + (m-1)I = (n+m)\,I$ وقسمة طرفي (18) على $(n+m)$ ، نجد أن :

$$I = \frac{\cosh^{m-1} ax\ \sinh^{n+1} ax}{a\,(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \cosh^{m-2} ax\ \sinh^n ax\ dx \qquad \dots (19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

108

$$\int \sinh^n ax \cosh^m ax\, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax}{a(n+m)} - \frac{n-1}{n+m}\int \sinh^{n-2} ax \cosh^m ax\, dx \quad ; \; n \neq -m$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sinh^n ax \cosh^m ax\, dx \qquad .....(1)$$

فلنعيد صياغة (1) في الصورة المكافئة التالية :

$$I = \int \sinh^{n-1} ax \cosh^m ax \sinh ax\, dx \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\left(\cosh^{m+1} ax\right) = a(m+1)\cosh^m ax \sinh ax\, dx$$

$$\therefore \cosh^m ax \sinh ax\, dx = \frac{1}{a(m+1)} d\left(\cosh^{m+1} ax\right) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $\cosh^m ax \sinh ax\, dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I = \int \sinh^{n-1} ax \cdot \frac{1}{a(m+1)} d\left(\cosh^{m+1} ax\right)$$

$$= \frac{1}{a(m+1)} \int \sinh^{n-1} ax\, d\left(\cosh^{m+1} ax\right)$$

$$= \frac{1}{a(m+1)} I_1 \qquad .....(4)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \sinh^{n-1} ax\, d\left(\cosh^{m+1} ax\right) \qquad .....(5)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \sinh^{n-1} ax \qquad .....(6)$$

$$dv = d\left(\cosh^{m+1} ax\right) \qquad .....(7)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (6) ، نجد أن :

$$du = a(n-1)\sinh^{n-2} ax \cosh ax\, dx \qquad .....(8)$$

وبتكامل الطرفين في (7) ، نجد أن :

$$v = \int d\left(\cosh^{m+1} ax\right)$$

$$= \cosh^{m+1} ax \qquad .....(9)$$

باستخدام (7) ، (6) في (5) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u\,dv \qquad ...(10)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (10) ، نجد ان:

$$I_1 = uv - \int v\,du \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن u, du, v من (9) ، (8) ، (6) على الترتيب في (11) ، نجد أن:

$$I_1 = \left(\sinh^{n-1} ax\right)\left(\cosh^{m+1} ax\right) - \int \left(\cosh^{m+1} ax\right)\cdot a\,(n-1)\sinh^{n-2} ax \cosh ax\,dx$$

$$= \sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m+2} ax\,dx$$

$$= \sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m} ax \cosh^2 ax\,dx \qquad ...(12)$$

معلوم لدينا من دراسة الدوال الزائدية أن :

$$\cosh^2 ax - \sinh^2 ax = 1$$

$$\therefore\ \cosh^2 ax = \sinh^2 ax + 1 \qquad ...(13)$$

بالتعويض عن $\cosh^2 ax$ من (13) في (12) ، نجد أن :

$$I_1 = \sinh^{n-1} ax\ \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax\ \cosh^{m} ax \left(\sinh^2 ax + 1\right)dx$$

$$= \sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m} ax\,dx - a\,(n-1)\int \sinh^{n} ax \cosh^{m} ax\,dx \qquad ...(14)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن من (14) هـو التكامل في (1) ، فإن (14) تـأخذ الصورة :

$$I_1 = \sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m} ax\,dx - a\,(n-1)I \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن I_1 من (15) في (4) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a\,(m+1)}\left\{\sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax - a\,(n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m} ax\,dx - a\,(n-1)I\right\} \qquad ...(16)$$

بضرب طرفي (16) في $(m+1)$ ، نجد أن :

$$(m+1)I = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh^{m+1} ax}{a} - (n-1)\int \sinh^{n-2} ax \cosh^{m} ax\,dx - (n-1)I \qquad ...(17)$$

$$(m+1)I+(n-1)I=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh^{m+1}ax}{a}-$$

$$(n-1)\int \sinh^{n-2}ax\cosh^{m}ax\,dx \qquad ...(18)$$

فإذا لاحظنا في الطرف الأيسر ان $(m+1)I+(n-1)I=(m+n)I$ وقسمة طرفي (18) على $(n+m)$ ، نجد أن :

$$I=\frac{\sinh^{n-1}ax\cosh^{m+1}ax}{a(n+m)}-$$

$$\frac{n-1}{n+m}\int \sinh^{n-2}ax\cosh^{m}ax\,dx \qquad ...(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

109

$$\int \sinh^{-1}ax\,dx=x\sinh^{-1}ax-\frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sinh^{-1}ax\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\sinh^{-1}ax \qquad .....(2)$$

$$dv=dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du=\frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v=\int dx=x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=(\sinh^{-1}ax)(x)-\int x\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}dx \qquad .....(8)$$

بضرب دالة التكامل في الطرف الأيمن في (8) بسطا ومقاما في $(2a)$ ، نجد ان :

$$I = x\sinh^{-1} ax - \frac{1}{2a}\int \frac{2a^2 x\, dx}{\sqrt{1+a^2x^2}} \quad .....(9)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن هو تفاضلـة المقـدار تحت علامـة الجـذر التربيعي ، أي أن الدالة المتكاملة على الصورة $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ ، وحيث ان :

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$$

$$\therefore\ I = x\sinh^{-1} ax - \frac{1}{2a}\left\{2\sqrt{1+a^2x^2} + C\right\}$$

$$= x\sinh^{-1} ax - \frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a} + C \quad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{110} \quad \int x\sinh^{-1} ax\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4a^2}\right)\sinh^{-1} ax - \frac{x\sqrt{1+a^2x^2}}{4a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\sinh^{-1} ax\, dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sinh^{-1} ax \quad .....(2)$$

$$dv = x\, dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}} dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\left(\sinh^{-1} ax\right)\left(\frac{1}{2}x^2\right)-\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2a}{\sqrt{1+a^2x^2}}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2a}{a\sqrt{(1/a)^2+x^2}}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{(1/a)^2+x^2}}dx \qquad .....(8)$$

وفي العلاقة (181) أثبتنا أن :

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=-\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+C$$

وباستخدام هذه العلاقة لحساب التكامل في الطرف الأيمن من (8) ، نجد أن :

$$I=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax-\frac{1}{2}\left\{-\frac{(1/a)^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{(1/a)}+\frac{x\sqrt{(1/a)^2+x^2}}{2}\right\}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2a^2}\sinh^{-1} ax+\frac{x\sqrt{1+a^2x^2}}{2a}\right\}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\sinh^{-1} ax+\frac{1}{4a^2}\sinh^{-1} ax-\frac{x\sqrt{1+a^2x^2}}{4a}+C$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4a^2}\right)\sinh^{-1} ax-\frac{x\sqrt{1+a^2x^2}}{4a}+C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب

$$\int x^n \sinh^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1} \sinh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n \sqrt{1+a^2x^2}}{a\,(n+1)} + \frac{n}{a\,(n+1)}\int x^{n-1}\sqrt{1+a^2x^2}\,dx \qquad ; n \neq -1 \tag{111}$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \sinh^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \sinh^{-1} ax\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n\, x^{n-1}\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int \sinh^{-1} ax\, dx$$

ومن العلاقة (109) نجد أن:

$$v = x \sinh^{-1} ax - \frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a} \qquad .....(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x^n\left(x \sinh^{-1} ax - \frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a}\right) - \int \left(x \sinh^{-1} ax - \frac{\sqrt{1+a^2x^2}}{a}\right) n\, x^{n-1} dx$$

$$= x^{n+1} \sinh^{-1} ax - \frac{x^n\sqrt{1+a^2x^2}}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sqrt{1+a^2x^2}\,dx - n\int x^n \sinh^{-1} ax\, dx \qquad .....(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن من (8) هو التكامل في (1) فإن (8) يمكن ان تأخذ الصورة التالية:

$$I = x^{n+1} \sinh^{-1} ax - \frac{x^n \sqrt{1+a^2x^2}}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sqrt{1+a^2x^2}\, dx - n\, I$$

$$\therefore\ I + n\, I = x^{n+1} \sinh^{-1} ax - \frac{x^n \sqrt{1+a^2x^2}}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sqrt{1+a^2x^2}\, dx$$

$$I = \frac{x^{n+1} \sinh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n \sqrt{1+a^2x^2}}{a(n+1)} + \frac{n}{a(n+1)} \int x^{n-1} \sqrt{1+a^2x^2}\, dx \qquad .....(9)$$

من (9) ، (1) يثبت صحة المطلوب.

112

$$\int \cosh^{-1} ax\, dx = x \cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \cosh^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \cosh^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{a}{\sqrt{a^2x^2-1}}\, dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int dx = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = (\cosh^{-1} ax)(x) - \int x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2x^2-1}}\, dx \qquad .....(8)$$

بضرب دالة التكامل في الطرف الأيمن في (8) بسطا ومقاما في $(2a)$ ، نجد ان :

$$I = x\cosh^{-1} ax - \frac{1}{2a}\int \frac{2a^2 x\, dx}{\sqrt{a^2x^2-1}} \quad .....(9)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن هو تفاضلة المقدار تحت علامة الجذر التربيعي، أي أن الدالة المتكاملة على الصورة $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ ، وحيث أن:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$$

$$\therefore\ I = x\cosh^{-1} ax - \frac{1}{2a}\cdot 2\sqrt{a^2x^2-1} + C$$

$$= x\cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + C \quad ...(10)$$

من (10) ، (1) يثبت صحة القانون.

$$113 \qquad \int x\cosh^{-1} ax\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4a^2}\right)\cosh^{-1} ax - \frac{x\sqrt{a^2x^2-1}}{4a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\cosh^{-1} ax\, dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \cosh^{-1} ax \quad .....(2)$$

$$dv = x\, dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{a}{\sqrt{a^2x^2-1}} dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7)، نجد أن :

$$I=\left(\cosh^{-1}ax\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2x^2-1}}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2a}{\sqrt{a^2x^2-1}}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2a}{a\sqrt{x^2-(1/a)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-(1/a)^2}}\,dx \qquad .....(8)$$

وفي العلاقة رقم (210) أثبتنا أن :

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+C$$

$$I=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{2}\left\{\frac{(1/a)^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{(1/a)}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-(1/a)^2}\right\}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2a^2}\cosh^{-1}ax+\frac{x}{2}\frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a}\right\}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\cosh^{-1}ax-\frac{1}{4a^2}\cosh^{-1}ax-\frac{x\sqrt{a^2x^2-1}}{4a}+C$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4a^2}\right)\cosh^{-1}ax-\frac{x\sqrt{a^2x^2-1}}{4a}+C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int x^n \cosh^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}\cosh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2+1}}{a(n+1)} + \frac{n}{a(n+1)}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\,dx \qquad ; n \neq -1$$

114

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \cosh^{-1} ax\,dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad \text{.....}(2)$$

$$dv = \cosh^{-1} ax\,dx \qquad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n\,x^{n-1}dx \qquad \text{.....}(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) مستخدمين العلاقة (112)، نجد أن :

$$v = x\cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a} \qquad \text{.....}(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\,dv \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \qquad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x^n\left(x\cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a}\right) - \int\left(x\cosh^{-1} ax - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a}\right) n\,x^{n-1}dx$$

$$= x^{n+1}\cosh^{-1} ax - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\,dx - n\int x^n\cosh^{-1} ax\,dx \qquad \text{.....}(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (8) هو التكامل في (1) فإن (8) تأخذ الصورة التالية:

$$I = x^{n+1}\cosh^{-1} ax - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\,dx - n\,I$$

$$I + n\,I = x^{n+1}\cosh^{-1} ax - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2-1}}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\;dx$$

$$I = \frac{x^{n+1}\cosh^{-1} ax}{n+1} - \frac{x^n\sqrt{a^2x^2-1}}{a\,(n+1)} + \frac{n}{a\,(n+1)}\int x^{n-1}\sqrt{a^2x^2-1}\;dx \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\langle 115 \rangle \quad \int \tanh^{-1} ax\,dx = x\tanh^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left|1-a^2x^2\right| + C \quad ; \; |x|<1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \tanh^{-1} ax\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن :

$$u = \tanh^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{a}{1-a^2x^2}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int dx = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(\tanh^{-1} ax\right)(x) - \int x\cdot\frac{a}{1-a^2x^2}dx \qquad .....(8)$$

$$= x\tanh^{-1} ax + \int \frac{-ax}{1-a^2x^2}dx \qquad .....(9)$$

بضرب الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن في (9) بسطا ومقاما في $(2a)$ ، نجد أن :

$$I = x\tanh^{-1} ax + \frac{1}{2a}\int \frac{-2a^2x\,dx}{1-a^2x^2} \qquad ...(10)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن هو تفاضلة المقام، أي أن الدالة المتكاملة على الصورة $\int \frac{du}{u}$ ، وحيث أن:

$$\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$$

$$\therefore\ I = x \tanh^{-1} ax + \frac{1}{2a} ln\left|1 - a^2x^2\right| + C \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

116

$$\int x \tanh^{-1} ax\, dx = \frac{x^2}{2} \tanh^{-1} ax + \frac{x}{2a} + \frac{a}{2} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x \tanh^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \tanh^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{a}{1 - a^2x^2} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\left(\tanh^{-1}ax\right)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{a}{1-a^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax-\frac{a}{2}\int\frac{x^2}{1-a^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax+\frac{a}{2}\int\frac{x^2}{a^2x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax+\frac{1}{2a}\int\frac{x^2}{x^2-\left(1/a^2\right)}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax+\frac{1}{2a}I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1=\int\frac{x^2}{x^2-\left(1/a^2\right)}\,dx$$

فإذا افترضنا أن $b=\frac{1}{a}$ فإن I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1=\int\frac{x^2}{x^2-b^2}\,dx \qquad .....(9)$$

وبقسمة بسط الدالة المتكاملة في (9) على مقامها ، نجد أن:

$$I_1=\int\left\{1+\frac{b^2}{x^2-b^2}\right\}dx$$

$$=\int dx+b^2\int\frac{1}{x^2-b^2}\,dx \qquad ...(10)$$

ومن التكاملات الأساسية (التي أثبتناها في العلاقة رقم 193) ، نجد أن :

$$\int\frac{1}{x^2-b^2}\,dx=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right|+C$$

$$\therefore\ I_1=x+b^2\left\{\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right|\right\}+C$$

$$=x+\frac{b}{2}\ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right|+C \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن $b=\frac{1}{a}$ في (11) ، نجد أن :

$$I_1=x+\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-(1/a)}{x+(1/a)}\right|+C$$

$$=x+\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right|+C \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن I_1 من (12) في (8) ، نجد أن :

$$I=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax+\frac{1}{2a}\left\{x+\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right|\right\}+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\tanh^{-1}ax+\frac{x}{2a}+\frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right|+C \quad ...(13)$$

من (1) و (13) يثبت صحة المطلوب.

117

$$\int x^n\tanh^{-1}ax\,dx=\frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\tanh^{-1}ax+\frac{1}{2a}x^n\ln\left(1-a^2x^2\right)-\frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(1-a^2x^2\right)dx\right\} \quad ;n\neq-1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x^n\tanh^{-1}ax\,dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\tanh^{-1}ax \quad .....(2)$$

$$dv=x^n\,dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=\frac{a\,dx}{1-a^2x^2} \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v=\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\left(\tanh^{-1}ax\right)\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)-\int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\left(\frac{a\,dx}{1-a^2x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\tanh^{-1}ax-a\int\frac{x^{n+1}}{1-a^2x^2}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\tanh^{-1}ax-a\,I_1\right\} \quad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \frac{x^{n+1}}{1-a^2x^2}dx \qquad .....(9)$$

لحساب I_1 في (9) نستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = x^n \qquad ...(10)$$

$$dv_1 = \frac{x\,dx}{1-a^2x^2}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\frac{-2a^2x\,dx}{1-a^2x^2} \qquad ...(11)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (10) ، نجد ان :

$$du_1 = n\,x^{n-1}dx \qquad ...(12)$$

وبتكامل الطرفين في (11) ، نجد أن :

$$v_1 = \int -\frac{1}{2a^2}\frac{-2a^2x\,dx}{1-a^2x^2}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int \frac{-2a^2x\,dx}{1-a^2x^2}$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\ln\left(1-a^2x^2\right) \qquad ...(13)$$

باستخدام (11) ، (10) في (9) ، نجد ان I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int u_1\,dv_1 \qquad ...(14)$$

باستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (14) ، نجد ان :

$$I_1 = u_1v_1 - \int v_1\,du_1 \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من (13) ، (12) ، (10) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I_1 = x^n\left\{-\frac{1}{2a^2}\ln\left(1-a^2x^2\right)\right\} - \int\left\{-\frac{1}{2a^2}\ln\left(1-a^2x^2\right)\right\}n\,x^{n-1}dx$$

$$= -\frac{1}{2a^2}x^n\ln\left(1-a^2x^2\right) + \frac{n}{2a^2}\int x^{n-1}\ln\left(1-a^2x^2\right)dx \qquad ...(16)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (16) في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\tanh^{-1}ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(1-a^2x^2\right) - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(1-a^2x^2\right)dx\right\} \qquad ...(17)$$

من (17) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{118}\quad \int \coth^{-1} ax\, dx = x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2-1\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \coth^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \coth^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{-a}{a^2x^2-1}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int dx = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن قيمة u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(\coth^{-1} ax\right)(x) - \int x\left(\frac{-a}{a^2x^2-1}dx\right) \qquad .....(8)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (8) بسطا ومقاما في $2a$، نجد أن :

$$I = x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\int \frac{2a^2x}{a^2x^2-1}dx \qquad .....(9)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (9) على الصورة $\int \frac{du}{u}$ ، ولذا :

$$I = x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2-1\right)+C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$119 \quad \int x\coth^{-1}ax\,dx = \frac{x^2}{2}\coth^{-1}ax + \frac{x}{2a} + \frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\coth^{-1}ax\,dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \coth^{-1}ax \quad .....(2)$$
$$dv = x\,dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = d\left(\coth^{-1}ax\right) = \frac{-a\,dx}{a^2x^2-1} \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(\coth^{-1}ax\right)\left(x^2/2\right) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{-a\,dx}{a^2x^2-1}$$
$$= \frac{x^2}{2}\coth^{-1}ax + \frac{a}{2}\int \frac{x^2\,dx}{a^2x^2-1}$$
$$= \frac{x^2}{2}\coth^{-1}ax + \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{x^2-(1/a)^2}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\coth^{-1}ax + \frac{1}{2a}I_1 \quad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^2-(1/a)^2}\,dx$$

فإذا افترضنا أن $b = \frac{1}{a}$ فإن I_1 تأخذ الصورة:

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^2-b^2}\,dx \quad .....(9)$$

وبقسمة بسط الدالة المتكاملة في (9) على مقامها ، نجد أن :

$$I_1 = \int \left\{ 1 + \frac{b^2}{x^2 - b^2} \right\} dx$$

$$= \int dx + b^2 \int \frac{1}{x^2 - b^2} dx \qquad \dots (10)$$

ولحساب التكامل الثاني في الطرف الأيمن في (10) نستخدم العلاقة (193) وهي من التكاملات الأساسية التي أثبتناها فيما بعد.

$$I_1 = x + b^2 \left\{ \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| \right\} + C$$

$$= x + \frac{b}{2} \ln \left| \frac{x-b}{x+b} \right| + C \qquad \dots (11)$$

بالتعويض عن $b = \frac{1}{a}$ في (11) ، نجد أن :

$$I_1 = x + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - (1/a)}{x + (1/a)} \right| + C$$

$$= x + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax-1}{ax+1} \right| + C \qquad \dots (12)$$

بالتعويض عن I_1 من (12) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{x^2}{2} \coth^{-1} ax + \frac{1}{2a} \left\{ x + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{ax-1}{ax+1} \right| \right\} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \coth^{-1} ax + \frac{x}{2a} + \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{ax-1}{ax+1} \right| + C \qquad \dots (13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب.

120

$$\int x^n \coth^{-1} ax\, dx = \frac{1}{n+1} \left\{ x^{n+1} \coth^{-1} ax + \frac{1}{2a} x^n \ln \left(a^2 x^2 - 1\right) - \frac{n}{2a} \int x^{n-1} \ln \left(a^2 x^2 - 1\right) dx \right\} \qquad ; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \coth^{-1} ax\, dx \qquad \dots (1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad \dots (2)$$

$$dv = \coth^{-1} ax\, dx \qquad \dots (3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n\,x^{n-1}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int \coth^{-1} ax\,dx \qquad .....(5)$$

ولحساب v في (5) نستخدم القانون (118) ، نجد أن :

$$v = x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2 - 1\right) \qquad .....(6)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة:

$$I = \int u\,dv \qquad .....(7)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (7) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن u,du,v من (6) ، (4) ، (2) على الترتيب في (8) ، نجد أن :

$$I = x^n\left\{x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)\right\} - \int\left\{x\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)\right\} n\,x^{n-1}dx$$

$$= x^{n+1}\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(a^2x^2 - 1\right) - n\int x^n\coth^{-1} ax\,dx - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)dx \qquad .....(9)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأول في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل المعطى في (1) ، فإن :

$$I = x^{n+1}\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(a^2x^2 - 1\right) - n\,I - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)dx$$

$$I + n\,I = x^{n+1}\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(a^2x^2 - 1\right) - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)dx \qquad ...(10)$$

بقسمة طرفي (10) على $(n+1)$ ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\coth^{-1} ax + \frac{1}{2a}x^n\ln\left(a^2x^2 - 1\right) - \frac{n}{2a}\int x^{n-1}\ln\left(a^2x^2 - 1\right)\right\} \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\left\langle 121 \right\rangle \quad \int sech^{-1} ax\, dx = x\, sech^{-1} ax + \frac{1}{a} sin^{-1} ax + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int sech^{-1} ax \; dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = sech^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = d\left(sech^{-1} ax\right) = \frac{-a\,dx}{ax\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int dx = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \left(sech^{-1} ax\right)(x) - \int x\left(\frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}}\right)$$

$$= x\, sech^{-1} ax + \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}\, dx$$

$$= x\, sech^{-1} ax + \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{(1/a)^2 - x^2}}\, dx \qquad .....(8)$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (8) نستخدم العلاقة (237) ، نجد ان :

$$I = x\,sech^{-1}ax + \frac{1}{a}\sin^{-1}ax + C \quad \text{.....(9)}$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

122

$$\int x\,sech^{-1}ax\,dx = \frac{x^2}{2}sech^{-1}ax - \frac{1}{2a^2}\sqrt{1-a^2x^2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\,sech^{-1}ax\;dx \quad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = sech^{-1}ax \quad \text{.....(2)}$$
$$dv = x\,dx \quad \text{.....(3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{-a\,dx}{ax\sqrt{1-a^2x^2}} = \frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}} \quad \text{.....(4)}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{.....(5)}$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad \text{.....(6)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \quad \text{.....(7)}$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(sech^{-1}ax\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}}\right)$$
$$= \frac{x^2}{2}sech^{-1}ax - \frac{1}{2}\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$
$$= \frac{x^2}{2}sech^{-1}ax - \frac{1}{2}\int \left\{\frac{1}{2a^2}\frac{d\left(1-a^2x^2\right)}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right\} \quad \text{.....(8)}$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (8) نستخدم العلاقة (2)، نجد ان :

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1}ax-\frac{1}{2a^2}\sqrt{1-a^2x^2}+C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int x^n\operatorname{sech}^{-1}ax\,dx=\frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{sech}^{-1}ax+\int\frac{x^n}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\right\} \qquad \langle 123\rangle$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int x^n\operatorname{sech}^{-1}ax\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=\operatorname{sech}^{-1}ax \qquad .....(2)$$

$$dv=x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=\frac{-a\,dx}{ax\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$=\frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v=\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad .....(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=\left(\operatorname{sech}^{-1}ax\right)\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)-\int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\left(\frac{-dx}{x\sqrt{1-a^2x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{sech}^{-1}ax+\int\frac{x^n}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx\right\} \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\text{124}\qquad \int cosech^{-1}ax\ dx = x\ cosech^{-1}ax + \frac{1}{a}ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int cosech^{-1} ax\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = cosech^{-1} ax \qquad .....(2)$$
$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{-a\,dx}{ax\sqrt{a^2x^2+1}} = \frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int dx = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \left(cosech^{-1} ax\right)(x) - \int x\left(\frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}}\right)$$
$$= x\,cosech^{-1} ax + \int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$
$$= x\,cosech^{-1} ax + \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+(1/a)^2}}\,dx \qquad .....(8)$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (8) نستخدم العلاقة (177) ، نجد ان :

$$I = x\,cosech^{-1} ax + \frac{1}{a}sinh^{-1} ax + C$$
$$= x\,cosech^{-1} ax + \frac{1}{a}ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right| + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

125

$$\int x\, cosech^{-1} ax\, dx = \frac{x^2}{2} cosech^{-1} ax + \frac{1}{2a^2}\sqrt{1+a^2x^2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x\, cosech^{-1} ax\ dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = cosech^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{-a\, dx}{ax\sqrt{a^2x^2+1}} = \frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \left(cosech^{-1} ax\right)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} cosech^{-1} ax + \frac{1}{2}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2}{2} cosech^{-1} ax + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2a^2}\frac{2a^2x\, dx}{\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad .....(8)$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (8) نستخدم العلاقة (2) ، نجد ان :

$$I = \frac{x^2}{2} cosech^{-1} ax + \frac{1}{2a^2}\sqrt{a^2x^2+1} + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$126\quad \int x^n \operatorname{cosech}^{-1} ax\, dx = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1} \operatorname{cosech}^{-1} ax + \frac{1}{a^2} x^{n-1}\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{n-1}{a^2}\int x^{n-2}\sqrt{1+a^2x^2}dx\right\} \qquad ; n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n \operatorname{cosech}^{-1} ax \; dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \operatorname{cosech}^{-1} ax \qquad .....(2)$$

$$dv = x^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{-a\, dx}{ax\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$= \frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(\operatorname{cosech}^{-1} ax\right)\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\frac{-dx}{x\sqrt{a^2x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{cosech}^{-1} ax + \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2+1}}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{cosech}^{-1} ax + I_1\right\} \qquad .....(9)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2+1}}dx \qquad ...(10)$$

ولحساب I_1 سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u_1 = x^{n-1} \qquad ...(11)$$

$$dv_1 = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad ...(12)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (11) ، نجد أن :

$$du_1 = (n-1)x^{n-2}dx \qquad ...(13)$$

وبتكامل الطرفين في (12) ، نجد أن :

$$v_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{2a^2x\,dx}{\sqrt{a^2x^2+1}} \qquad ...(14)$$

ولحساب التكامل في (14) نستخدم العلاقة (2) ، نجد أن :

$$v_1 = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^2x^2+1} \qquad ...(15)$$

باستخدام (12) ، (11) في (10) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u_1 dv_1 \qquad ...(16)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (16) ، نجد أن :

$$I_1 = u_1v_1 - \int v_1\,du_1 \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن u,du,v من (15) ، (13) ، (11) على الترتيب في (17) ، نجد أن :

$$I_1 = x^{n-1}\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2x^2+1}\right) - \int \frac{1}{a^2}\sqrt{a^2x^2+1}\,(n-1)x^{n-2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}x^{n-1}\sqrt{a^2x^2+1} - \frac{n-1}{a^2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2x^2+1}\,dx \qquad ...(18)$$

بالتعويض عن I_1 من (18) في (9) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{n+1}\left\{x^{n+1}\operatorname{cosech}^{-1}ax + \frac{1}{a^2}x^{n-1}\sqrt{a^2x^2+1} - \frac{n-1}{a^2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2x^2+1}\,dx\right\} \quad ...(19)$$

من (19) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \; ; \; n \neq -1 \qquad 127$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int (ax+b)^n dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$u = ax+b \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = a\,dx$$

$$\therefore\; dx = \frac{1}{a}du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة $(ax+b), dx$ من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (I) تأخذ الصورة التالية:

$$I = \int u^n . \frac{1}{a}du$$

$$= \frac{1}{a}\int u^n\,du$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (4) ، نجد أن :

$$I = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

128

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left\{\frac{ax+b}{n+2}-\frac{b}{n+1}\right\}+C \; ; \; n \neq -1,-2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\,(ax+b)^n dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$ax+b=u \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x=\frac{u-b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد أن :

$$dx=\frac{1}{a}du \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $(ax+b), x, dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية:

$$I=\int\left(\frac{u-b}{a}\right)(u^n)\left(\frac{1}{a}du\right)$$

$$=\int\left\{\frac{u^{n+1}}{a^2}-\frac{b\,u^n}{a^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\int u^{n+1}du-\frac{b}{a^2}\int u^n du$$

$$=\frac{u^{n+2}}{a^2(n+2)}-\frac{b\,u^{n+1}}{a^2(n+1)}+C$$

$$=\frac{u^{n+1}}{a^2}\left\{\frac{u}{n+2}-\frac{b}{n+1}\right\}+C \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد أن :

$$I=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left\{\frac{ax+b}{n+2}-\frac{b}{n+1}\right\}+C \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{129} \quad \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{ax+b}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$ax+b = u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$a\,dx = du$$

$$\therefore\ dx = \frac{1}{a}du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة dx ، $(ax+b)$ من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$I = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{a}du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{a}\ln|u| + C \quad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (4) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{130} \quad \int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{ax+b}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التعويض، ولنفترض أن :

$$ax+b=u \quad ..... (2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x=\frac{u-b}{a} \quad ..... (3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد أن :

$$dx=\frac{1}{a}du \quad ..... (4)$$

بالتعويض عن dx , x , $(ax+b)$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية:

$$I=\int \frac{1}{u}\left(\frac{u-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{u-b}{u}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \left\{1-\frac{b}{u}\right\}du$$

$$=\frac{1}{a^2}\int du-\frac{b}{a^2}\int \frac{1}{u}du$$

$$=\frac{1}{a^2}u-\frac{b}{a^2}\ln|u|+C \quad ..... (5)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد أن :

$$I=\frac{ax+b}{a^2}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+C$$

$$=\frac{ax}{a^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+C$$

فإذا لاحظنا أن $\left(\frac{b}{a^2}+C\right)$ هو ثابت أيضا، فإن:

$$I=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+C \quad ..... (6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$131 \qquad \int \frac{x^2}{ax+b}dx = \frac{1}{a^3}\left\{\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b\,(ax+b) + b^2 \ln|ax+b|\right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{ax+b}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$ax+b = u \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u-b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$dx = \frac{1}{a}du \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $(ax+b)\,,\,x\,,\,dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{u-b}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{a}du\right) \\
&= \frac{1}{a^3}\int \frac{u^2-2bu+b^2}{u}du \\
&= \frac{1}{a^3}\int \left(u - 2b + \frac{b^2}{u}\right)du \\
&= \frac{1}{a^3}\left\{\int u\,du - 2b\int du + b^2\int \frac{1}{u}du\right\} \\
&= \frac{1}{a^3}\left\{\frac{1}{2}u^2 - 2bu + b^2 \ln|u|\right\} + C \qquad .....(5)
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^3}\left\{\frac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b\,(ax+b) + b^2 \ln|ax+b|\right\} + C \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

132

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^2}\left\{\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{(ax+b)^2}dx \qquad \text{.....} (1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$ax + b = u \qquad \text{.....} (2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u-b}{a} \qquad \text{.....} (3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$dx = \frac{1}{a}du \qquad \text{.....} (4)$$

بالتعويض عن $(ax+b), x, dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{u-b}{a}\right)\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{a}du\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{u-b}{u^2}du \\
&= \frac{1}{a^2}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{b}{u^2}\right)du \\
&= \frac{1}{a^2}\left\{\int \frac{1}{u}du - b\int \frac{1}{u^2}du\right\} \\
&= \frac{1}{a^2}\left\{\ln|u| - \frac{b\,u^{-2+1}}{-2+1}\right\} + C \\
&= \frac{1}{a^2}\left\{\ln|u| + \frac{b}{u}\right\} + C \qquad \text{.....} (5)
\end{aligned}$$

بالتعويض عن u من (2) في (5) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^2}\left\{\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right\} + C \qquad \text{.....} (6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln|ax+b| + C$$ 133

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx \qquad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$ax+b = u \qquad \text{.....(2)}$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u-b}{a} \qquad \text{.....(3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$dx = \frac{1}{a}du \qquad \text{.....(4)}$$

بالتعويض عن $(ax+b), x, dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{u-b}{a}\right)^2\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{1}{a}du\right) \\
&= \frac{1}{a^3}\int \frac{u^2-2bu+b^2}{u^2}du \\
&= \frac{1}{a^3}\int \left\{1-\frac{2b}{u}+\frac{b^2}{u^2}\right\}du \\
&= \frac{1}{a^3}\left\{\int du - 2b\int \frac{1}{u}du + b^2\int \frac{1}{u^2}du\right\} \\
&= \frac{1}{a^3}\left\{u - 2b\ln|u| - \frac{b^2}{u}\right\} + C \qquad \text{.....(5)}
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^3}\left\{(ax+b) - 2b\ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b}\right\} + C$$

فإذا لاحظنا ان $\left(\frac{b}{a^3}+C\right)$ هو ثابت أيضا، فإن:

$$I = \frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln|ax+b| + C \qquad \text{.....(6)}$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب.

134

$$\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \;\; ; \; b \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x(ax+b)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة:

$$\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+b} \qquad .....(2)$$

حيث A,B ثوابت ينبغي تعيين قيمة كل منها ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A(ax+b)+Bx}{x(ax+b)} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $x(ax+b)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1 = A(ax+b) + Bx \qquad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب ان تتحقق لجميع قيم x.

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، $x = \frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معامل A في (4) يساوي صفرا، لنجد أن :

$$1 = B\left(\frac{-b}{a}\right) \;\; \Rightarrow \;\; B = \frac{-a}{b} \qquad .....(5)$$

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، $x = 0$ وهي قيمة x التي تجعل معامل B يساوي صفرا ، لنجد أن :

$$1 = A(0+b) + B(0) \;\; \Rightarrow \;\; A = \frac{1}{b} \qquad .....(6)$$

بالتعويض بقيم A,B من (5) ، (6) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{1}{bx} - \frac{a}{b(ax+b)}$$
$$= \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+b}\right\} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x(ax+b)}$ من (7) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+b}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{b}\left\{\int \frac{dx}{x} - \int \frac{a\,dx}{ax+b}\right\} \qquad .....(8)$$

فإذا لاحظنا في كل من دالتي التكامل في الطرف الأيمن أن البسط هو تفاضلة المقام ، واستخدمنا علاقة التكامل :

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{b}\left\{ln|x| - ln|ax+b|\right\} + C \qquad .....(9)$$

ومن قوانين اللوغاريتمات ، نجد أن :

$$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{b} ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب.

135 $$\int \frac{1}{x(ax+b)^2} dx = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \ ;\ b \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x(ax+b)^2} dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفترض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{1}{x(ax+b)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{ax+b} + \frac{C}{(ax+b)^2} \qquad .....(2)$$

حيث A, B, C ثوابت ينبغي تعيين قيمة كل منها، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x(ax+b)^2} = \frac{A(ax+b)^2 + Bx(ax+b) + Cx}{x(ax+b)^2} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $x(ax+b)^2$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1 = A(ax+b)^2 + Bx(ax+b) + Cx \qquad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x.

ولإيجاد قيمة C نضع في (4) $x=-\dfrac{b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي A,B في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد ان :

$$1=C\left(-\frac{b}{a}\right)\Rightarrow C=-\frac{a}{b} \qquad .....(5)$$

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، x تساوي اي قيمة اختيارية ولتكن $x=0$ ، والتعويض عن $C=\dfrac{-b}{a}$ من (5) ، لنجد ان :

$$1=A\,b^2 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{b^2} \qquad .....(6)$$

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، x تساوي اي قيمة اختيارية ولتكن $x=1$ ، والتعويض عن $A=\dfrac{1}{b^2}\,,\,C=\dfrac{-a}{b}$ من (5) ، (6) على الترتيب ، لنجد أن :

$$1=\frac{1}{b^2}(a+b)^2+B\,(1)(a+b)+\left(\frac{-a}{b}\right)(1)$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2ab}{b^2}+\frac{b^2}{b^2}+B\,(a+b)-\frac{a}{b}$$

$$0=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+B\,(a+b)-\frac{a}{b}$$

$$0=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+B\,(a+b) \qquad .....(7)$$

بقسمة طرفي (7) على $(a+b)$ ، نجد ان :

$$B=-\frac{a}{b^2} \qquad .....(8)$$

بالتعويض بقيم A,B,C من (5) ، (8) ، (6) على الترتيب في (2) ، نجد ان :

$$\frac{1}{x\,(ax+b)^2}=\frac{1}{b^2x}-\frac{a}{b^2\,(ax+b)}-\frac{a}{b\,(ax+b)^2} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\dfrac{1}{x\,(ax+b)^2}$ من (9) في (1) ، نجد ان :

$$I=\int\left\{\frac{1}{b^2x}-\frac{a}{b^2\,(ax+b)}-\frac{a}{b\,(ax+b)^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{b^2}\int\frac{a\,dx}{ax+b}-\frac{a}{b}\int\frac{1}{(ax+b)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{b^2}I_1-\frac{1}{b^2}I_2-\frac{a}{b}I_3 \qquad ...(10)$$

وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int \frac{1}{u}du = ln\left|u\right| + C$$

وذلك للتكاملين I_1, I_2 واستخدام صيغة التكامل :

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

وذلك للتكامل في I_3 ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{b^2}ln\left|x\right| - \frac{1}{b^2}ln\left|ax+b\right| - \frac{a}{b}\left\{\frac{-1}{a(ax+b)}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{b^2}ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + \frac{1}{b(ax+b)} + C \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

136

$$\int \frac{1}{x^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C \quad ; \quad b \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2(ax+b)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة:

$$\frac{1}{x^2(ax+b)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{ax+b} \qquad .....(2)$$

حيث A, B, C ثوابت ينبغي تعيين قيمة كل منها، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x^2(ax+b)} = \frac{(Ax+B)(ax+b) + Cx^2}{x^2(ax+b)} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $x^2(ax+b)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1 = (Ax+B)(ax+b) + C\,x^2 \qquad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x.

ولإيجاد قيمة C نضع في (4) ، $x = \frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي A, B في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد أن :

$$1 = C\left(\frac{-b}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{a^2}{b^2} \qquad \text{.....}(5)$$

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، x تساوي اي قيمة اختيارية ولتكن $x = 0$ ، والتعويض عن $C = \frac{a^2}{b^2}$ من (5) ، لنجد ان :

$$1 = B\,b \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{b} \qquad \text{.....}(6)$$

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، x تساوي اي قيمة اختيارية غير $x = 0$ ولتكن $x = 1$ ، والتعويض عن $C = \frac{a^2}{b^2}$ من (5) ، لنجد ان :

$$1 = \left(A + \frac{1}{b}\right)(a+b) + \frac{a^2}{b^2}$$

$$1 - \frac{a^2}{b^2} = \left(A + \frac{1}{b}\right)(a+b)$$

$$\frac{(b-a)(b+a)}{b^2} = \left(A + \frac{1}{a}\right)(a+b)$$

$$\frac{b-a}{b^2} = A + \frac{1}{b}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{b-a}{b^2} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{b-a-b}{b^2} \\ &= \frac{-a}{b^2} \qquad \text{.....}(7) \end{aligned}$$

بالتعويض بقيم A,B,C من (5) ، (6) ، (7) على الترتيب في (2) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(ax+b)} &= \frac{-(a/b^2)x + (1/b)}{x^2} + \frac{(a^2/b^2)}{ax+b} \\ &= \frac{-ax+b}{b^2x^2} + \frac{a^2}{b^2(ax+b)} \\ &= \frac{1}{b^2}\left\{\frac{-ax+b}{x^2} + \frac{a^2}{ax+b}\right\} \\ &= \frac{1}{b^2}\left\{\frac{-a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a^2}{ax+b}\right\} \qquad \text{.....}(8) \end{aligned}$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x^2(ax+b)}$ من (8) في (1) ، نجد ان :

$$I=\int \frac{1}{b^2}\left\{\frac{-a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{a^2}{ax+b}\right\}dx$$

$$=\frac{-a}{b^2}\int \frac{1}{x}dx+\frac{1}{b}\int \frac{1}{x^2}dx+\frac{a}{b^2}\int \frac{a\,dx}{ax+b}$$

$$=\frac{-a}{b^2}I_1+\frac{1}{b}I_2+\frac{a}{b^2}I_3 \qquad .....(9)$$

وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int \frac{du}{u}=ln\,|\,u\,|+C$$

وذلك للتكاملين $I_1\,,\,I_3$ ، واستخدام صيغة التكامل :

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad ;\; n\neq -1$$

وذلك للتكامل I_2 ، نجد أن :

$$I=\frac{-a}{b^2}ln\,|\,x\,|-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}ln\,|\,ax+b\,|+C$$

$$=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\left\{ln\,|\,ax+b\,|-ln\,|\,x\,|\right\}+C$$

$$=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب.

137 $$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx=\frac{1}{(ad-bc)}ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|+C \;;\; (ad-bc)\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d} \qquad .....(2)$$

حيث A,B ثابتان ينبغي تعيين قيمة كل منهما ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A\,(cx+d)+B\,(ax+b)}{(ax+b)(cx+d)} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $(ax+b)(cx+d)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1 = A(cx+d) + B(ax+b) \qquad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، $x = \frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معامل B في المتطابقة (4) يساوي الصفر ، لنجد أن :

$$1 = A\left\{c\left(-\frac{b}{a}\right)+d\right\}$$

$$\therefore\ A = \frac{a}{ad-bc} \qquad .....(5)$$

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، $x = \frac{-d}{c}$ وهي قيمة x التي تجعل معامل A في المتطابقة (4) يساوي الصفر ، لنجد أن :

$$1 = B\left\{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b\right\}$$

$$\therefore\ B = \frac{-c}{ad-bc} \qquad .....(6)$$

بالتعويض بقيمتي A,B من (6) ، (5) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{a}{(ad-bc)(ax+b)} - \frac{c}{(ad-bc)(cx+d)}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right\} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}$ من (7) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\int \frac{a}{ax+b}dx - \int \frac{c}{cx+d}dx\right\} \qquad .....(8)$$

وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int \frac{1}{u}du = ln|u| + C$$

$$I = \frac{1}{ad-bc}\left\{ln|ax+b| - ln|cx+d|\right\} + C$$

ومن قوانين اللوغاريتمات ، نجد أن :

$$ln\frac{a}{b} = ln a - ln b$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{ad-bc} ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}dx =$$

138

$$\frac{1}{(ad-bc)}\left\{-\frac{b}{a}\ln|ax+b|+\frac{d}{c}\ln|cx+d|\right\}+C \;;\; (ad-bc)\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{x}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d} \qquad .....(2)$$

حيث A,B ثابتان ينبغي تعيين قيمة كل منهما ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{x}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A\,(cx+d)+B\,(ax+b)}{(ax+b)(cx+d)} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $(ax+b)(cx+d)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$x = A\,(cx+d)+B\,(ax+b) \qquad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، $x=\frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معامل B في المتطابقة (4) يساوي الصفر ، لنجد أن :

$$-\frac{b}{a} = A\left\{c\left(-\frac{b}{a}\right)+d\right\}$$

$$= A\left\{\frac{ad-bc}{a}\right\}$$

$$\therefore\; A = \frac{-b}{ad-bc} \qquad .....(5)$$

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، $x=\frac{-d}{c}$ وهي قيمة x التي تجعل معامل A في المتطابقة (4) يساوي الصفر ، لنجد أن :

$$-\frac{d}{c} = B\left\{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b\right\}$$

$$= \frac{cb-ad}{c}$$

$$\therefore\; B = \frac{d}{ad-bc} \qquad .....(6)$$

بالتعويض بقيمتي A,B من (6) ، (5) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\frac{x}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{-b}{(ad-bc)(ax+b)}+\frac{d}{(ad-bc)(cx+d)}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-b}{ax+b}+\frac{d}{cx+d}\right\} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{x}{(ax+b)(cx+d)}$ من (7) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-b}{ax+b}+\frac{d}{cx+d}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\left\{\int\frac{-b}{ax+b}dx+\int\frac{d}{cx+d}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-b}{a}\int\frac{a\,dx}{ax+b}+\frac{d}{c}\int\frac{c\,dx}{cx+d}\right\}$$

في الخطوة السابقة ضربنا الدالة المتكاملة اليسرى داخل { } بسطا ومقاما في a والدالة المتكاملة اليمنى بسطا ومقاما في c وذلك لجعل البسط في كل منهما هو تفاضلة المقام ، وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int\frac{1}{u}du=ln|u|+C$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{(ad-bc)}\left\{-\frac{b}{a}ln|ax+b|+\frac{d}{c}ln|cx+d|\right\}+C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

139

$$\int\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}dx=$$

$$\frac{1}{(ad-bc)}\left\{\frac{-1}{ax+b}-\frac{c}{(ad-bc)}ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right\}+C\ ;\ ad-bc\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{K}{cx+d} \qquad .....(2)$$

حيث A,B,K ثوابت ينبغي تعيين قيمة كل منها ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A(ax+b)(cx+d)+B(cx+d)+K(ax+b)^2}{(ax+b)^2(cx+d)} \quad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $(ax+b)^2(cx+d)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1=A(ax+b)(cx+d)+B(cx+d)+K(ax+b)^2 \quad .....(4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، $x=\frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي K , A في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد أن :

$$\begin{aligned}1&=B\left\{c\left(\frac{-b}{a}\right)+d\right\}\\&=B\left(\frac{ad-bc}{a}\right)\\\therefore\ B&=\frac{a}{ad-bc}\end{aligned} \quad .....(5)$$

ولإيجاد قيمة K نضع في (4) ، $x=-\frac{d}{c}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي B , A في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد أن :

$$\begin{aligned}1&=K\left\{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b\right\}^2\\&=K\left\{\frac{-ad+bc}{c}\right\}^2\\\therefore\ K&=\frac{c^2}{(ad-bc)^2}\end{aligned} \quad .....(6)$$

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية ولتكن $x=0$ والتعويض عن B,K من (6) ، (5) ، لنجد أن :

$$\begin{aligned}1&=Abd+\frac{ad}{ad-bc}+\frac{b^2c^2}{(ad-bc)^2}\\\therefore\ Abd&=1-\frac{ad}{ad-bc}-\frac{b^2c^2}{(ad-bc)^2}\\&=\frac{(ad-bc)^2-ad(ad-bc)-b^2c^2}{(ad-bc)^2}\\&=\frac{-abcd}{(ad-bc)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ A = \frac{-ac}{(ad-bc)^2} \qquad .....(7)$$

بالتعويض بقيم A , B , K من (6) ، (5) ، (7) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{-ac}{(ad-bc)^2(ax+b)} + \frac{a}{(ad-bc)(ax+b)^2} + \frac{c^2}{(ad-bc)^2(cx+d)}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{a}{(ax+b)^2} - \frac{c}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\right\} \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}$ من (8) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{a}{(ax+b)^2} - \frac{c}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\int \frac{a}{(ax+b)^2}dx - \frac{c}{ad-bc}\left(\int \frac{a}{ax+b}dx - \int \frac{c}{cx+d}dx\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-1}{ax+b} - \frac{c}{ad-bc}\left(\ln|ax+b| - \ln|cx+d|\right)\right\} + C$$

وباستخدام العلاقة $\ln m - \ln n = \ln\frac{m}{n}$ ، نجد أن:

$$I = \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-1}{ax+b} - \frac{c}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right\} + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

140

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}dx = \frac{1}{(ad-bc)}\left\{\frac{b}{a(ax+b)} + \frac{d}{(ad-bc)}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right\} + C\ ;\ ad-bc \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{K}{cx+d} \qquad ..... (2)$$

حيث A,B,K ثوابت ينبغي تعيين قيمة كل منها ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A(ax+b)(cx+d)+B(cx+d)+K(ax+b)^2}{(ax+b)^2(cx+d)} \qquad ..... (3)$$

بضرب طرفي (3) في $(ax+b)^2(cx+d)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$x=A(ax+b)(cx+d)+B(cx+d)+K(ax+b)^2 \qquad ..... (4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة B نضع في (4) ، $x=\frac{-b}{a}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي K , A في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد أن :

$$-\frac{b}{a}=B\left\{c\left(\frac{-b}{a}\right)+d\right\}$$

$$=B\left(\frac{ad-bc}{a}\right)$$

$$\therefore\ B=\frac{-b}{ad-bc} \qquad ..... (5)$$

ولإيجاد قيمة K نضع في (4) ، $x=-\frac{d}{c}$ وهي قيمة x التي تجعل معاملي B , A في المتطابقة (4) أصفارا ، لنجد أن :

$$-\frac{d}{c}=K\left\{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b\right\}^2$$

$$=K\left\{\frac{cb-ad}{c}\right\}^2$$

$$=K\frac{(ad-bc)^2}{c^2}$$

$$\therefore\ K=\frac{-cd}{(ad-bc)^2} \qquad ..... (6)$$

ولإيجاد قيمة A نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية ولتكن $x=0$ والتعويض عن B , K من (6) ، (5) ، لنجد أن :

$$0=Abd-\frac{bd}{ad-bc}-\frac{cdb^2}{(ad-bc)^2}$$

$$\therefore\ Abd = \frac{cdb^2}{(ad-bc)^2} + \frac{bd}{ad-bc}$$

$$= \frac{cdb^2 + bd\,(ad-bc)}{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{cdb^2 + abd^2 - cdb^2}{(ad-bc)^2}$$

بقسمة الطرفين على bd، نجد ان:

$$\therefore\ A = \frac{ad}{(ad-bc)^2} \qquad .....(7)$$

بالتعويض بقيم $A\ ,\ B\ ,\ K$ من (6) ، (5) ، (7) على الترتيب في (2) ، نجد ان :

$$\frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{ad}{(ad-bc)^2(ax+b)} - \frac{b}{(ad-bc)(ax+b)^2} - \frac{cd}{(ad-bc)^2(cx+d)}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-b}{(ax+b)^2} + \frac{d}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\right\} \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}$ من (8) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{-b}{(ax+b)^2} + \frac{d}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\int \frac{-b}{(ax+b)^2}dx + \frac{d}{ad-bc}\left(\int \frac{a\,dx}{ax+b}dx - \int \frac{c\,dx}{cx+d}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{b}{ax+b} + \frac{d}{ad-bc}\left(ln\,|ax+b| - ln\,|cx+d|\right)\right\} + C$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left\{\frac{b}{ax+b} + \frac{d}{ad-bc}ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right\} + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int x\sqrt{ax+b}\;dx=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\,(ax+b)^{3/2}+C$$ 141

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\sqrt{ax+b}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$ax+b=u^2 \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x=\frac{u^2-b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد أن :

$$dx=\frac{2u\,du}{a} \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $(ax+b),\ x\ ,\ dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$I=\int\left(\frac{u^2-b}{a}\right)(u)\left(\frac{2u\,du}{a}\right)$$

$$=\frac{2}{a^2}\int\left(u^4-bu^2\right)du$$

$$=\frac{2}{a^2}\left\{\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}bu^3\right\}+C$$

$$=\frac{2}{15a^2}\left(3u^5-5bu^3\right)+C \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد أن :

$$I=\frac{2}{15a^2}\left\{3\,(ax+b)^{5/2}-5b\,(ax+b)^{3/2}\right\}+C$$

$$=\frac{2}{15a^2}\left\{3\,(ax+b)-5b\right\}(ax+b)^{3/2}+C$$

$$=\frac{2}{15a^2}\,(3ax-2b)(ax+b)^{3/2}+C \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int x^2 \sqrt{ax+b}\, dx =$$

142

$$\frac{2}{a^3}\left\{\frac{(ax+b)^{7/2}}{7}-\frac{2b\,(ax+b)^{5/2}}{5}+\frac{b^2\,(ax+b)^{3/2}}{3}\right\}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^2 \sqrt{ax+b}\, dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$ax+b=u^2 \qquad \text{.....}(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة التالية :

$$x=\frac{u^2-b}{a} \qquad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد أن :

$$dx=\frac{2u\,du}{a} \qquad \text{.....}(4)$$

بالتعويض عن $(ax+b)\,,\, x\,,\, dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، فإن (1) تأخذ الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{u^2-b}{a}\right)^2 u\cdot\frac{2u\,du}{a}\\
&=\frac{2}{a^3}\int u^2\left(u^2-b\right)^2 du\\
&=\frac{2}{a^3}\int \left(u^6-2bu^4+b^2u^2\right)du\\
&=\frac{2}{a^3}\left\{\int u^6du-2b\int u^4du+b^2\int u^2du\right\}\\
&=\frac{2}{a^3}\left\{\frac{u^7}{7}-\frac{2bu^5}{5}+\frac{b^2u^3}{3}\right\}+C \qquad \text{.....}(5)
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد أن :

$$I=\frac{2}{a^3}\left\{\frac{(ax+b)^{7/2}}{7}-\frac{2b\,(ax+b)^{5/2}}{5}+\frac{b^3\,(ax+b)^{3/2}}{3}\right\}+C \qquad \text{.....}(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب .

<u>لاحظ أن :</u>

$$I=\frac{2}{105\,a^3}\left(15\,a^2x^2-12\,abx+8\,b^2\right)(ax+b)^{3/2}+C$$

143

$$\int x^n \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{a(2n+3)} - \frac{2bn}{a(2n+3)} \int x^{n-1} \sqrt{ax+b}\ dx$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^n \sqrt{ax+b}\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان ؛

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \sqrt{ax+b}\, dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان ؛

$$du = nx^{n-1} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} v &= \int \sqrt{ax+b}\, dx \\ &= \int (ax+b)^{1/2} dx \\ &= \frac{(ax+b)^{3/2}}{a(3/2)} \\ &= \frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a} \qquad .....(5) \end{aligned}$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u , du , v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= x^n \left\{\frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}\right\} - \int \left\{\frac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}\right\} \cdot n\, x^{n-1} dx \\ &= \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2n}{3a} \int x^{n-1} (ax+b)^{3/2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2n}{3a} \int (ax+b)\sqrt{ax+b}\ x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2n}{3a} \int ax\sqrt{ax+b}\ x^{n-1} dx - \frac{2n}{3a} \int b\sqrt{ax+b}\ x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2nb}{3a} \int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx - \frac{2n}{3} \int x^n \sqrt{ax+b}\, dx \qquad .....(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (8) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I = \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2nb}{3a} \int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx - \frac{2n}{3} I$$

$$I + \frac{2n}{3} I = \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{3a} - \frac{2nb}{3a} \int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx \qquad .....(9)$$

بضرب طرفي (9) في $\frac{3}{2n+3}$ (لاحظ أنه النظير الضربي لمعامل I في الطرف الأيسر) ، نجد ان :

$$I = \frac{2x^n (ax+b)^{3/2}}{a(2n+3)} - \frac{2nb}{a(2n+3)} \int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\, dx \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

144

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C \ ; \ b<0 & (i) \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \ ; \ b>0 & (ii) \end{cases}$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$ax+b = u^2 \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u^2-b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$dx = \frac{2u\,du}{a} \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن $(ax+b), x , dx$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{u^2-b}{a}\right)u} \frac{2u\,du}{a}$$

$$= 2\int \frac{1}{u^2-b} du \qquad \text{.....} (5)$$

فإذا كانت $b<0$ فإن $(-b)>0$ وعندئذ :

يؤول التكامل في (5) إلى الصورة $\int \frac{1}{u^2+k^2} du$ حيث $k^2=-b$ ولأن :

$$\int \frac{1}{u^2+k^2} du = \frac{1}{k} \tan^{-1}\left(\frac{u}{k}\right) + C \qquad \text{.....} (6)$$

وباستخدام (6) لحساب I في (5) ، نجد ان :

$$\therefore I = 2\left\{\frac{1}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{-b}}\right\} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{-b}} + C \qquad \text{.....} (7)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (7) ، نجد ان :

$$I = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{-b}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C \qquad \text{.....} (8)$$

<u>من (8) و (1) يثبت صحة العلاقة (i) .</u>

وإذا كانت $b>0$ فإن $(-b)<0$ وعندئذ :

يؤول التكامل في (5) إلى الصورة $\int \frac{1}{u^2-k^2} du$ حيث $k^2=b$ ولأن :

$$\int \frac{1}{u^2-k^2} du = \frac{1}{2k} \ln\left|\frac{u-k}{u+k}\right| + C \qquad \text{.....} (9)$$

وباستخدام (9) لحساب I في (5) ، نجد ان :

$$I = 2\left\{\frac{1}{2\sqrt{b}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{b}}{u+\sqrt{b}}\right|\right\} + C \qquad \text{...} (10)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (10) ، نجد ان :

$$I = 2\left\{\frac{1}{2\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|\right\} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \qquad \text{...} (11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة العلاقة (ii) .

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = \begin{cases} 2\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C \quad ;b>0 \quad (i) \\ 2\sqrt{ax+b}-\sqrt{-b}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C \quad ;b<0 \quad (ii) \end{cases} \quad \langle 145 \rangle$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx \quad .....(1)$$

لنضرب دالة التكامل في (1) بسطا ومقاما في $\sqrt{ax+b}$ ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\cdot\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax+b}}dx$$

$$= \int \frac{ax+b}{x\sqrt{ax+b}}dx \quad .....(2)$$

بكتابة دالة التكامل في (2) في صورة كسورها الجزئية على الصورة :

$$I = \int \left\{ \frac{ax}{x\sqrt{ax+b}} + \frac{b}{x\sqrt{ax+b}} \right\} dx$$

$$= \int \frac{adx}{\sqrt{ax+b}} + b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx \quad .....(3)$$

فإذا لاحظنا أن بسط التكامل الأول في الطرف الأيمن من (3) هـو تفاضلة المقدار تحت علامـة الجذر التربيعي في المقام ، وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C$$

$$\therefore I = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx \quad .....(4)$$

والتكامل في الطرف الأيمن من (4) هو التكامل في العلاقة (144) ، ولذا :

$$I = \begin{cases} 2\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C \quad ;b>0 \quad (i) \\ 2\sqrt{ax+b}-\sqrt{-b}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C \quad ;b<0 \quad (ii) \end{cases} \quad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

146

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \sqrt{ax+b} \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax+b}} \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = -\frac{1}{x} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \sqrt{ax+b}\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}dx$$

$$= \frac{-\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}dx \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

لاحظ : التكامل في الطرف الأيمن من (٥) هو العلاقة (144) .

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C \qquad ; a \neq 0$$ 147

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$ax+b = u^2 \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u^2-b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) . نجد لن :

$$dx = \frac{2u\,du}{a} \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx ، $(ax+b)$ من (4) ، (3) ، (2) في (1) :

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(u^2-b)/a}{u}\frac{2u\,du}{a} \\
&= \frac{2}{a^2}\int (u^2-b)du \\
&= \frac{2}{a^2}\left\{\int u^2\,du - b\int du\right\} \\
&= \frac{2}{a^2}\left\{\frac{u^3}{3}-bu\right\}+C \\
&= \frac{2}{3a^2}\left\{u^3-3bu\right\}+C \qquad .....(5)
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد ان :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{3a^2}\left\{(ax+b)^{3/2}-3b\sqrt{ax+b}\right\}+C \\
&= \frac{2}{3a^2}\left\{(ax+b)-3b\right\}\sqrt{ax+b}+C \\
&= \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C \qquad .....(6)
\end{aligned}$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب .

148

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{15a^3}\left(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2\right)\sqrt{ax+b} + C \;;\; a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad \text{..... (1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$ax+b = u^2 \qquad \text{..... (2)}$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة :

$$x = \frac{u^2 - b}{a} \qquad \text{..... (3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان :

$$dx = \frac{2u\,du}{a} \qquad \text{..... (4)}$$

بالتعويض عن x, dx ، $(ax+b)$ من (4) ، (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(\frac{u^2-b}{a}\right)^2}{u}\cdot\frac{2u\,du}{a} \\
&= \frac{2}{a^3}\int \left(u^2-b\right)^2 du \\
&= \frac{2}{a^3}\int \left(u^4 - 2bu^2 + b^2\right)du \\
&= \frac{2}{a^3}\left\{\frac{u^5}{5} - \frac{2bu^3}{3} + b^2u\right\} + C \\
&= \frac{2}{15a^3}\left\{3u^4 - 10bu^2 + 15b^2\right\}u + C \qquad \text{..... (5)}
\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد ان :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{15a^3}\left\{3\left(ax+b\right)^2 - 10\,b\left(ax+b\right) + 15\,b^2\right\}\sqrt{ax+b} + C \\
&= \frac{2}{15a^3}\left(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2\right)\sqrt{ax+b} + C \qquad \text{..... (6)}
\end{aligned}$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$149 \qquad \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2bn}{a(2n+1)}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx \; ; a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x^n \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = nx^{n-1}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = x^n\left(\frac{2\sqrt{ax+b}}{a}\right) - \int\left(\frac{2\sqrt{ax+b}}{a}\right)nx^{n-1}dx$$

$$= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2n}{a}\int \sqrt{ax+b}\; x^{n-1}dx \qquad .....(8)$$

بضرب الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن بسطا ومقاما في $\sqrt{ax+b}$ ، نجد أن :

$$I = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2n}{a}\int (ax+b)\frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx$$

$$= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2n}{a}\int\left\{\frac{bx^{n-1}}{\sqrt{ax+b}} + \frac{ax\cdot x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}\right\}dx$$

$$= \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2nb}{a}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx - 2n\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad .....(9)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل في (1) ، فإن (9) يمكن صياغتها في الصورة:

$$I = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2nb}{a}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx - 2n\,I \qquad ...(10)$$

$$I + 2nI = \frac{2x^2\sqrt{ax+b}}{a} - \frac{2nb}{a}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad ...(11)$$

وبقسمة طرفي (11) على $(2n+1)$ ، نجد ان :

$$I = \frac{2x^n\sqrt{ax+b}}{a\,(2n+1)} - \frac{2nb}{a\,(2n+1)}\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب.

150 $\quad \int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \frac{2}{a}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C \quad ; \; n \neq -2 \;, a \neq 0$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان ؛

$$ax + b = u^2 \qquad .....(2)$$

ومن (2) نحصل على x في الصورة

$$x = \frac{u^2 - b}{a} \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (3) ، نجد ان ؛

$$dx = \frac{2u\,du}{a} \qquad .....(4)$$

بالتعويض عن dx ، $(ax+b)$ من (4) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان ؛

$$I = \int u^n \left(\frac{2u\,du}{a}\right)$$

$$= \frac{2}{a}\int u^{n+1} du$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{u^{n+2}}{n+2}\right) + C \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (5) ، نجد ان ؛

$$I = \frac{2}{a}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C \quad ; \; n \neq -2 \qquad .....(6)$$

من (6) و (1) يثبت صحة المطلوب .

151 $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{(x-a)}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C\ ;a>0$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned}2ax-x^2&=a^2-a^2+2ax-x^2\\&=a^2-\left(a^2-2ax+x^2\right)\\&=a^2-(a-x)^2\end{aligned} \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \sqrt{a^2-(a-x)^2}\,dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$a-x=a\sin u \qquad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد أن :

$$dx=-a\cos u\,du \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $dx,(a-x)$ من (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I&=\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\,(-a\cos u\,du)\\&=\int \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 u\right)}(-a\cos u\,du)\end{aligned} \qquad .....(6)$$

من قوانين حساب المثلثات نجد أن :

$$\begin{aligned}&\cos^2 u+\sin^2 u=1\\&\cos^2 u=1-\sin^2 u\end{aligned} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\left(1-\sin^2 u\right)$ من (7) في (6) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I&=\int \sqrt{a^2\cos^2 u}\,(-a\cos u\,du)\\&=-a^2\int \cos^2 u\,du\end{aligned} \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u)$$

$$\therefore\ I = -a^2\int \frac{1}{2}(1+\cos 2u)du$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left\{\int du + \int \cos 2u\ du\right\}$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left\{u + \frac{\sin 2u}{2}\right\} + C \qquad .....(9)$$

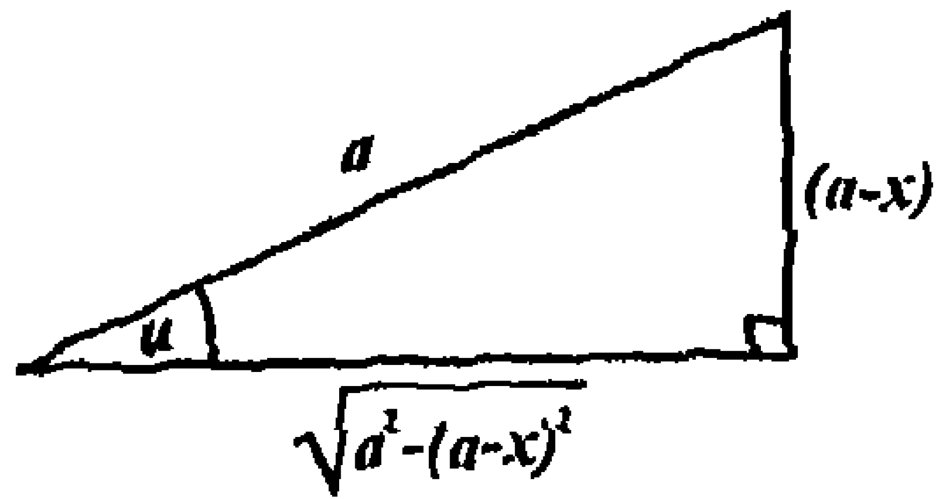
باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u$$

$$\therefore\ I = -\frac{a^2}{2}\left\{u + \frac{2\sin u\cos u}{2}\right\} + C$$

$$= -\frac{a^2}{2}u - \frac{a^2}{2}\sin u\cos u + C \qquad ...(10)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\sin\ u$, $\cos\ u$ بدلالة x والتعويض بهما في (10)، نجد أن :



$$I = -\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a-x}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a-x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}{a} + C$$

وباستخدام العلاقة :

$$\sin^{-1}(-u) = -\sin^{-1}u \qquad ...(11)$$

$$I = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \frac{a-x}{2}\sqrt{2ax-x^2} + C \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

152

$$\int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}dx \quad ;\ a>0\ ,\ n\neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$2ax - x^2 = a^2 - a^2 + 2ax - x^2$$
$$= a^2 - (a^2 - 2ax + x^2)$$
$$= a^2 - (a - x)^2 \quad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \left(\sqrt{a^2 - (a-x)^2}\right)^n dx \quad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$a - x = a \sin y \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد ان :

$$dx = -a \cos y \, dy \quad .....(5)$$

بالتعويض عن dx ,$(a-x)$ من (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد ان :

$$I = \int \left(\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 y}\right)^n (-a \cos y \, dy)$$
$$= \int \left(\sqrt{a^2 (1 - \sin^2 y)}\right)^n (-a \cos y \, dy) \quad .....(6)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد ان :

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$
$$\therefore \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \quad .....(7)$$

بالتعويض عن $(1 - \sin^2 y)$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I = \int \left(\sqrt{a^2 \cos^2 y}\right)^n (-a \cos y \, dy)$$
$$= -a^{n+1} \int \cos^n y \cos y \, dy \quad .....(8)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\sin y) = \cos y \, dy \quad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cos y \, dy$ من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I = -a^{n+1} \int \cos^n y \, d(\sin y) \quad ...(10)$$

ولحساب I في (10) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \cos^n y \quad ...(11)$$
$$dv = d(\sin y) \quad ...(12)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (11) ، نجد ان :

$$du = -n \cos^{n-1} y \sin y \, dy \quad ...(13)$$

وبتكامل الطرفين في (12) ، نجد أن :

$$v = \int d(\sin y) = \sin y \quad ...(14)$$

وباستخدام (12) ، (11) في (10) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = -a^{n+1} \int u\, dv$$

$$= -a^{n+1} I_1 \qquad ...(15)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int u\, dv \qquad ...(16)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (16) ، نجد ان :

$$I_1 = uv - \int v\, du \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن u,du,v من (14) ، (13) ، (11) على الترتيب في (17) ، نجد ان :

$$I_1 = \cos^n y\,(\sin y) - \int \sin y\left(-n\cos^{n-1} y \sin y\, dy\right)$$

$$= \cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y \sin^2 y\, dy \qquad ...(18)$$

من المتطابقة المثلثية (7) ، نجد ان :

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y \qquad ...(19)$$

بالتعويض عن $\sin^2 y$ من (19) في (18) ، نجد ان

$$I_1 = \cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\left(1 - \cos^2 y\right) dy$$

$$= \cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\, dy - n\int \cos^{n+1} y\, dy \qquad ...(20)$$

بالتعبير عن التكامل الأخير في الطرف الأيمن في (20) على الصورة :

$$\int \cos^{n+1} y\, dy = \int \cos^n y \cos y\, dy$$

$$= \int \cos^n y\, d(\sin y)$$

$$I_1 = \cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\, dy - n\int \cos^n y\, d\,(\sin y) \qquad ...(21)$$

بالتعويض عن I_1 من (21) في (15) ، نجد ان :

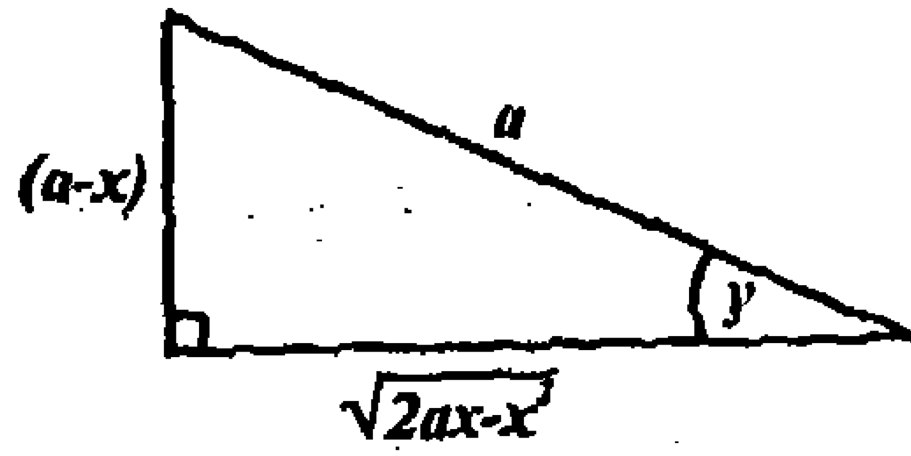
$$I = -a^{n+1}\left\{\cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\, dy - n\int \cos^n y\, d\,(\sin y)\right\}$$

$$= -a^{n+1}\left\{\cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\, dy\right\} - n\left[-a^{n+1}\int \cos^n y\, d(\sin y)\right] \qquad .... (2$$

والمقدار بين القوسين [ ] في الطرف الأيمن من (22) هو I (راجع (10)) .

$$\therefore\ I + nI = -a^{n+1}\left\{\cos^n y \sin y + n\int \cos^{n-1} y\, dy\right\} \qquad ...(23)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cos y$ ، $\sin y$ بدلالة x والتعويض بهما في (23) ، نجد أن :



$$I(n+1) = -a^{n+1}\left\{\left(\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)^n\left(\frac{a-x}{a}\right)+ n\int\left(\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)^{n-1}\left(\frac{dx}{-a\left(\sqrt{2ax-x^2}/a\right)}\right)\right\}$$

حصلنا على قيمة dy من (5)

$$= (x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n - na^2\int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}dx \qquad \ldots (24)$$

وبقسمة طرفي (24) على $(n+1)$ ، نجد أن :

$$I = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}dx \qquad \ldots (25)$$

من (25) و (1) يثبت صحة المطلوب.

153 $$\int\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \quad ; \ a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx \qquad \ldots\ldots (1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned} 2ax-x^2 &= a^2-a^2+2ax-x^2 \\ &= a^2-\left(a^2-2ax+x^2\right) \\ &= a^2-(a-x)^2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int\frac{1}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}dx \qquad \ldots\ldots (3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$a-x=a\sin u \quad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد ان :

$$dx=-a\cos u\,du \quad .....(5)$$

بالتعويض عن dx, $(a-x)$ من (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد ان :

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}(-a\cos u\,du)$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}}(-a\cos u\,du) \quad .....(6)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد ان :

$$\cos^2 u+\sin^2 u=1$$

$$\therefore\ \cos^2 u=1-\sin^2 u \quad .....(7)$$

بالتعويض عن $(1-\sin^2 u)$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 u}}(-a\cos u\,du)$$

$$=-\int du$$

$$=-u+C \quad .....(8)$$

باستخدام (4) لحساب قيمة u بدلالة x ، نجد ان :

$$\sin u=\frac{a-x}{a}$$

$$\therefore\ u=\sin^{-1}\left(\frac{a-x}{a}\right) \quad .....(9)$$

بالتعويض عن قيمة u من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I=-\sin^{-1}\left(\frac{a-x}{a}\right)+C \quad ...(10)$$

وباستخدام العلاقة :

$$\sin^{-1}(-\theta)=-\sin^{-1}\theta$$

$$\therefore\ I=\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \quad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

$$\boxed{154}\qquad \int \frac{1}{\left(2ax-x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C \quad ; \ a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{\left(2ax-x^2\right)^{3/2}}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار داخل القوس في مقام الدالة المكاملة في (1) في الصورة :

$$\begin{aligned} 2ax-x^2 &= a^2-a^2+2ax-x^2 \\ &= a^2-\left(a^2-2ax+x^2\right) \\ &= a^2-(a-x)^2 \qquad .....(2) \end{aligned}$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{\left[a^2-(a-x)^2\right]^{3/2}}dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$a-x=a\sin u \qquad ; u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد أن :

$$dx=-a\cos u\, du \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $dx, (a-x)$ من (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\left[a^2-a^2\sin^2 u\right]^{3/2}}(-a\cos u\, du) \\ &= \int \frac{1}{\left[a^2\left(1-\sin^2 u\right)\right]^{3/2}}(-a\cos u\, du) \qquad .....(6) \end{aligned}$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 u+\sin^2 u=1$$
$$\therefore\ \cos^2 u=1-\sin^2 u \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\left(1-\sin^2 u\right)$ من (7) في (6) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\left[a^2\cos^2 u\right]^{3/2}}(-a\cos u\, du) \\ &= -\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos^3 u}\cos u\, du \\ &= -\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos^2 u}du \qquad .....(8) \end{aligned}$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}$$

$$\therefore\ I = -\frac{1}{a^2}\int \sec^2 u\, du \qquad .....(9)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

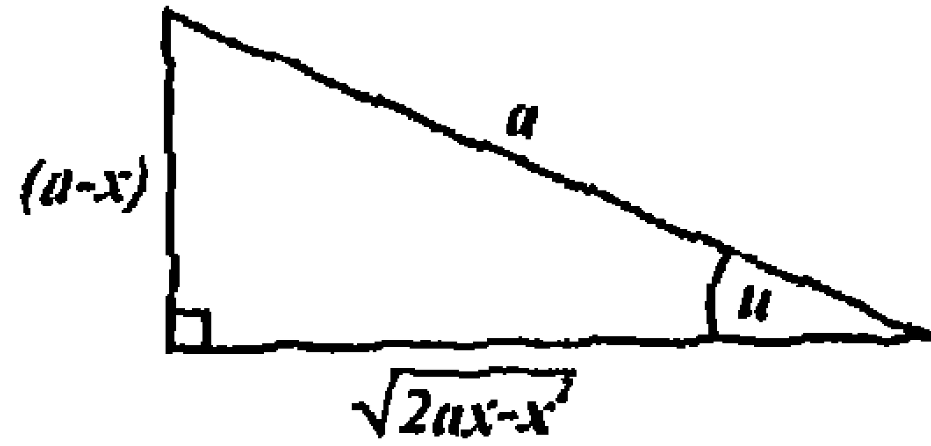
$$d(\tan u) = \sec^2 u\, du \qquad ...(10)$$

باستخدام (10) في (9) ، نجد أن :

$$I = -\frac{1}{a^2}\int d(\tan u)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\tan u + C \qquad ...(11)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب $\tan u$ والتعويض بقيمتها في (11) ، نجد أن :



$$I = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)+C$$

$$= \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

155

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}}dx \quad ;\ a>0\ ,\ n\neq 2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned}2ax - x^2 &= a^2 - a^2 + 2ax - x^2\\ &= a^2 - (a^2 - 2ax + x^2)\\ &= a^2 - (a - x)^2\end{aligned} \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 - (a - x)^2}\right)^n} dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$a - x = a \sin y \qquad .....(4)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) نجد أن :

$$dx = -a \cos y \, dy \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن $(a - x), dx$ من (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 y}\right)^n} (-a \cos y \, dy)\\ &= \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 (1 - \sin^2 y)}\right)^n} (-a \cos y \, dy)\end{aligned} \qquad .....(6)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\begin{aligned}&\cos^2 + \sin^2 y = 1\\ &\therefore \cos^2 y = 1 - \sin^2 y\end{aligned} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $(1 - \sin^2 y)$ من (7) في (6) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 y}\right)^n} (-a \cos y \, dy)\\ &= \int \frac{1}{(a \cos y)^n} (-a \cos y \, dy)\\ &= -a^{1-n} \int \frac{1}{\cos^n y} \cos y \, dy\\ &= -a^{1-n} \int \frac{1}{\cos^{n-1} y} dy\\ &= -a^{1-n} \int \sec^{n-1} y \, dy \qquad .....(*)\\ &= -a^{1-n} \int \sec^{n-3} y \sec^2 y \, dy \qquad .....(8)\end{aligned}$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\tan y) = \sec^2 y \, dy \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $sec^2 y\ dy$ من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I = -a^{1-n}\int sec^{n-3} y\ d(tan\ y)$$
$$= -a^{1-n} I_1 \quad ...(10)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int sec^{n-3} y\ d\ (tan\ y) \quad ...(11)$$

ولحساب I_1 في (11) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = sec^{n-3} y \quad ...(12)$$
$$dv = d\ (tan\ y) \quad ...(13)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (12) ، نجد أن :

$$du = (n-3)sec^{n-3} y\ tan\ y\ dy \quad ...(14)$$

وبتكامل الطرفين في (13) ، نجد ان :

$$v = tan\ y \quad ...(15)$$

وباستخدام (13) ، (12) في (11) ، نجد أن I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1 = \int u\ dv \quad ...(16)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (16) ، نجد ان :

$$I_1 = uv - \int v\ du \quad ...(17)$$

بالتعويض عن u,du,v من (15) ، (14) ، (12) على الترتيب في (17) ، نجد ان :

$$I_1 = (sec^{n-3} y)(tan\ y) - \int (tan\ y)(n-3)sec^{n-3} y\ tan\ y\ dy$$
$$= sec^{n-3} y\ tan\ y - (n-3)\int sec^{n-3} y\ tan^2 y\ dy \quad ...(18)$$

ومن المتطابقة المثلثية:

$$tan^2 y = sec^2 y - 1 \quad ; \quad y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ...(19)$$

بالتعويض عن قيمة $tan^2 y$ من (19) في (18) ، نجد أن :

$$I_1 = sec^{n-3} y\ tan\ y - (n-3)\int sec^{n-3} y\ (sec^2 y - 1)dy$$
$$= sec^{n-3} y\ tan\ y + (n-3)\int sec^{n-3} y\ dy - (n-3)\int sec^{n-1} y\ dy \quad ...(20)$$

والتكامل الأخير في الطرف الأيمن من (20) هو I_1 [راجع (*) و (11)] ولذا:

$$I_1 = sec^{n-3} y\ tan\ y + (n-3)\int sec^{n-3} y\ dy - (n-3)I_1$$

$$I_1 + (n-3)I_1 = sec^{n-3} y\ tan\ y + (n-3)\int sec^{n-3} y\ dy \quad ...(21)$$

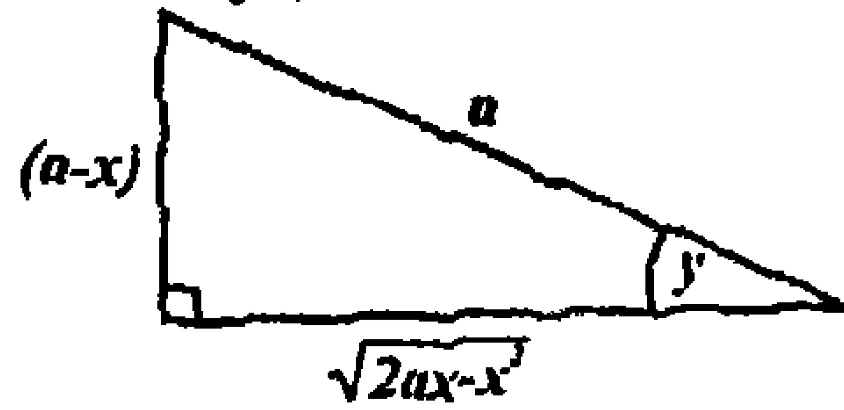
بقسمة طرفي (21) على $(n-2)$ ، نجد ان :

$$I_1=\frac{1}{n-2}\sec^{n-3}y\tan y+\frac{(n-3)}{(n-2)}\int\sec^{n-3}y\,dy \quad ...(22)$$

بالتعويض عن I_1 من (22) في (10) ، نجد ان :

$$I=-a^{1-n}\left\{\frac{1}{(n-2)}\sec^{n-3}y\tan y+\frac{(n-3)}{(n-2)}\int\sec^{n-3}y\,dy\right\} \quad ...(23)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\tan y$ ، $\sec y$ بدلالة x والتعويض بهما في (23) ، نجد ان :



$$I=-a^{1-n}\left\{\frac{1}{(n-2)}\left(\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)^{n-3}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{(n-3)}{(n-2)}\int\left(\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)^{n-3}\left\{\frac{dx}{-a\left(\sqrt{2ax-x^2}/a\right)}\right\}\right\}$$

$$=\frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2}+\frac{(n-3)}{(n-2)a^2}\int\frac{1}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}}dx \quad ...(24)$$

من (24) و(1) يثبت صحة المطلوب.

156

$$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=$$
$$\frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6}+\frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C \quad ;\ a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx \quad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned}2ax-x^2&=a^2-a^2+2ax-x^2\\&=a^2-\left(x^2-2ax+a^2\right)\\&=a^2-(x-a)^2 \quad .....(2)\end{aligned}$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) ، سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x-a = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4)$$

ومن (4) ، نحصل على x في الصورة :

$$x = a\,(1+\sin u) \qquad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن $(x-a), x, dx$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$I = \int a\,(1+\sin u)\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\;\; a\cos u\, du$$

$$= \int a\,(1+\sin u)\sqrt{a^2(1-\sin^2 u)}\;\; a\cos u\, du \qquad .....(7)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$\therefore \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن قيمة $(1-\sin^2 u)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

$$I = \int a\,(1+\sin u)\sqrt{a^2\cos^2 u}\;\; a\cos u\, du$$

$$= a^3\int (1+\sin u)\cos^2 u\, du$$

$$= a^3\int \cos^2 u\, du + a^3\int \cos^2 u\sin u\, du$$

$$= a^3 I_1 + a^3 I_2 \qquad .....(9)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int \cos^2 u\, du \qquad ...(10)$$

$$I_2 = \int \cos^2 u\sin u\, du \qquad ...(11)$$

ولحساب I_1 نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2u)du$$

$$= \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \cos 2u\, du$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C \qquad ...(12)$$

ولحساب I_2 معلوم لدينا من قوانين التفاضلات أن :

$$d(\cos u) = -\sin u \, du$$

$$\therefore I_2 = \int \cos^2 u \{-d(\cos u)\}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 u + C \qquad ...(13)$$

بالتعويض عن I_1 , I_2 من (13) ، (12) على الترتيب في (9) ، نجد أن :

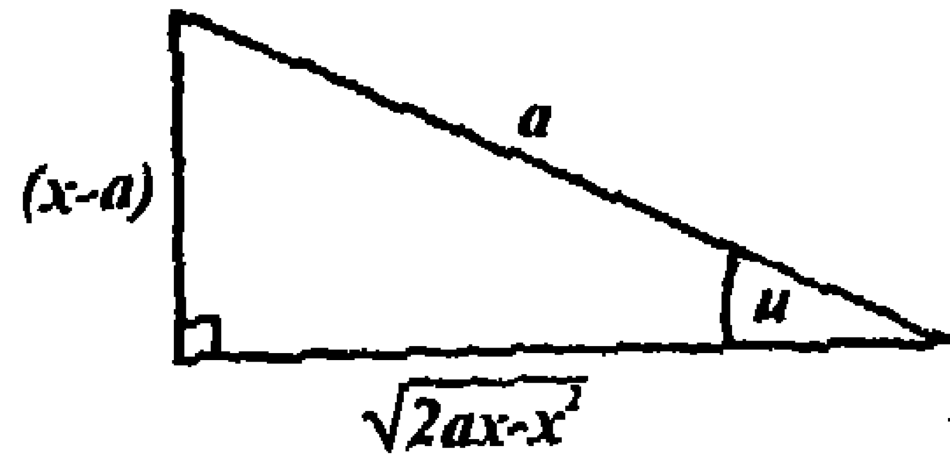
$$I = \frac{a^3}{2}u + \frac{a^3}{4}\sin 2u - \frac{a^3}{3}\cos^3 u + C \qquad ...(14)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u$$

$$I = \frac{a^3}{2}u + \frac{a^3}{4}(2\sin u \cos u) - \frac{a^3}{3}\cos^3 u + C$$

$$= \frac{a^3}{2}u + \frac{a^3}{2}\sin u \cos u - \frac{a^3}{3}\cos^3 u + C \qquad ...(15)$$



وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\sin u$ ، $\cos u$ بدلالة x والتعويض بهما في (15) ، نجد أن :

$$I = \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + \frac{a^3}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} - \frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)^3 + C$$

$$= \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + \left\{\frac{a}{2}(x-a) - \frac{1}{3}(2ax-x^2)\right\}\sqrt{2ax-x^2} + C$$

$$= \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + C \qquad ...(16)$$

من (16) و (1) يثبت صحة المطلوب .

157

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C \quad ; \; a > 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned}2ax-x^2 &= a^2-a^2+2ax-x^2\\ &= a^2-\left(x^2-2ax+a^2\right)\\ &= a^2-(x-a)^2\end{aligned} \quad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-(x-a)^2}}dx \quad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x-a=a\sin u \quad .....(4)$$

ومن (4) ، نحصل على x في الصورة :

$$x=a\left(1+\sin u\right) \quad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx=a\cos u\, du \quad .....(6)$$

بالتعويض عن $(x-a), x, dx$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{a\left(1+\sin u\right)\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}\left(a\cos u\, du\right)\\ &= \int \frac{1}{\left(1+\sin u\right)\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 u\right)}}\cos u\, du\end{aligned} \quad .....(7)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\begin{aligned}&\cos^2 u+\sin^2 u=1\\ &\therefore\ \cos^2 u=1-\sin^2 u\end{aligned} \quad .....(8)$$

بالتعويض عن $\left(1-\sin^2 u\right)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{\left(1+\sin u\right)\sqrt{a^2\cos^2 u}}\cos u\, du\\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\sin u}du\end{aligned} \quad .....(9)$$

وباستخدام العلاقة (9) لحساب I في (9) ، نجد أن :

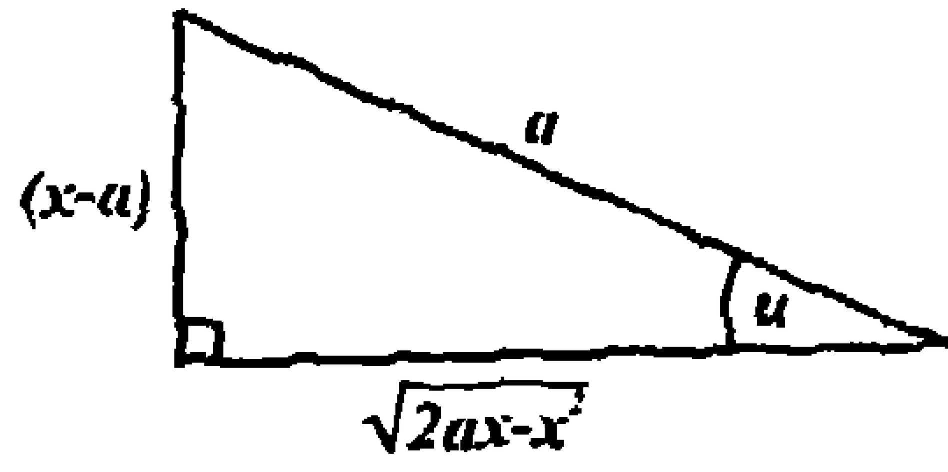
$$I=\frac{-1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right)+C \quad ...(10)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right)=\sec u-\tan u \quad ...(11)$$

$$\therefore I=\frac{-1}{a}\left(\sec u-\tan u\right)+C \quad ...(12)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\sec u$ ، $\tan u$ بدلالة x والتعويض بهما في (12) ، نجد أن :



$$I = \frac{-1}{a}\left\{\frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}}\right\} + C$$

$$= \frac{-1}{a}\left\{\frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\right\} + C$$

$$= \frac{-1}{a}\left\{\frac{\left(\sqrt{2a-x}\right)^2}{\sqrt{x}\,\sqrt{2a-x}}\right\} + C$$

$$= \frac{-1}{a}\left\{\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\right\} + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

158 $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \quad ; \ a > 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) ، في الصورة التالية :

$$2ax - x^2 = a^2 - a^2 + 2ax - x^2$$
$$= a^2 - \left(x^2 - 2ax - a^2\right)$$
$$= a^2 - (x-a)^2 \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}{x}dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x - a = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4)$$

ومن (4) نحصل على x في الصورة :

$$x = a\left(1+\sin u\right) \qquad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن $(x-a),\ x\ ,du$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}}{a\left(1+\sin u\right)}\left(a\cos u\, du\right)$$

$$= \int \frac{\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 u\right)}}{\left(1+\sin u\right)}\left(\cos u\, du\right) \qquad .....(7)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$\therefore\ \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن $\left(1-\sin^2 u\right)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2\cos^2 u}}{\left(1+\sin u\right)}\left(\cos u\, du\right)$$

$$= a\int \frac{\cos^2 u}{1+\sin u}du \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cos^2 u$ من (8) في (9) ، نجد أن :

$$I = a\int \frac{1-\sin^2 u}{1+\sin u}du$$

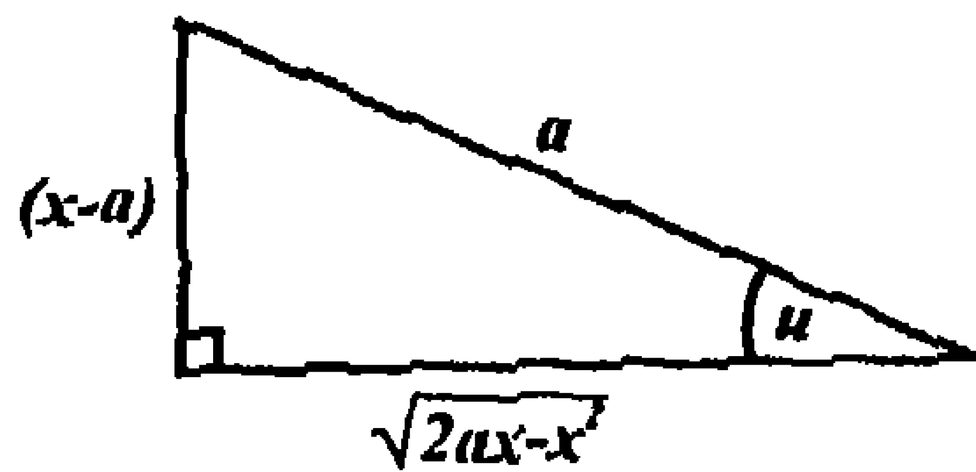
$$= a\int \frac{\left(1+\sin u\right)\left(1-\sin u\right)}{\left(1+\sin u\right)}du$$

$$= a\int \left(1-\sin u\right)du$$

$$= a\int du - a\int \sin u\, du$$

$$= au + a\cos u + C \qquad ...(10)$$

وبأستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\cos u$ والتعويض بها في (10) ، نجد أن :



$$I = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+a\left(\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)+C$$

$$= a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+\sqrt{2ax-x^2}+C \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

159 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)-\sqrt{2ax-x^2}+C \quad ; \ a>0$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) ، في الصورة التالية :

$$2ax-x^2 = a^2-a^2+2ax-x^2$$

$$= a^2-\left(x^2-2ax+a^2\right)$$

$$= a^2-\left(x-a\right)^2 \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{a^2-\left(x-a\right)^2}}dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x-a = a\sin u \qquad ; u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4)$$

ومن (4) نحصل على x في الصورة :

$$x = a\left(1+\sin u\right) \qquad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن dx , x , $(x-a)$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a\left(1+\sin u\right)}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}\left(a\cos u\, du\right)$$

$$= a^2\int \frac{\left(1+\sin u\right)}{\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 u\right)}}\cos u\, du \qquad .....(7)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$\therefore \ \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن $(1 - \sin^2 u)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

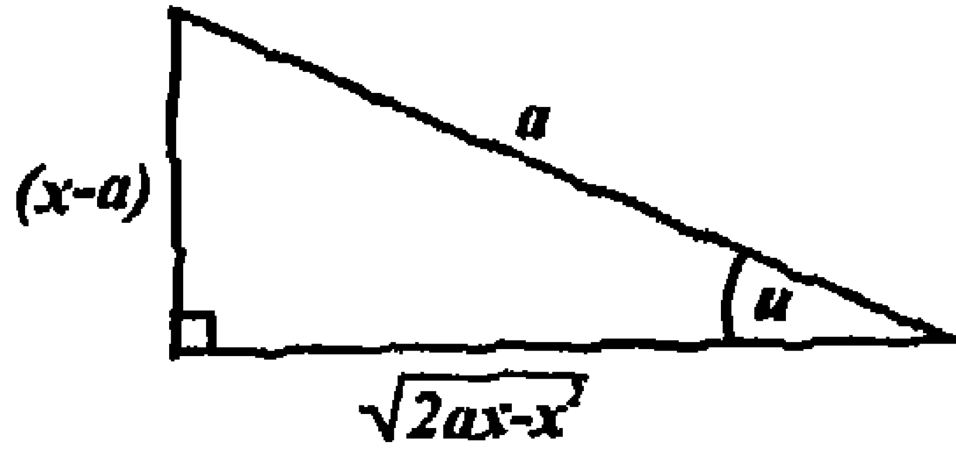
$$I = a^2 \int \frac{(1 + \sin u)}{\sqrt{a^2 \cos^2 u}} \cos u \, du$$

$$= a \int (1 + \sin u) du$$

$$= a \int du + a \int \sin u \, du$$

$$= au - a \cos u + C \qquad .....(9)$$

وباستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\cos u$ والتعويض بها في (9) ، نجد أن :



$$I = a \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - a\left(\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}\right) + C$$

$$= a \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C \qquad ... (10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

160 $$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx = -2\sqrt{\frac{2a - x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \quad ; \ a > 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$2ax - x^2 = a^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$= a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)$$

$$= a^2 - (x - a)^2 \qquad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}{x^2} dx \qquad \text{.....} (3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x - a = a \sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{.....} (4)$$

ومن (4) نحصل على x في الصورة :

$$x = a(1 + \sin u) \qquad \text{.....} (5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx = a \cos u \, du \qquad \text{.....} (6)$$

بالتعويض عن $(x-a), x, dx$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}}{a^2 (1+\sin u)^2} (a \cos u \, du)$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{a^2 (1 - \sin^2 u)}}{(1+\sin u)^2} (\cos u \, du) \qquad \text{.....} (7)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 + \sin^2 u = 1$$

$$\therefore \cos^2 u = 1 - \sin^2 u \qquad \text{.....} (8)$$

بالتعويض عن $(1 - \sin^2 u)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 u}}{(1+\sin u)^2} \cos u \, du$$

$$= \int \frac{\cos^2 u}{(1+\sin u)^2} du \qquad \text{.....} (9)$$

بالتعويض عن $\cos^2 u$ من (8) في (9) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1 - \sin^2 u}{(1+\sin u)^2} du$$

$$= \int \frac{(1+\sin u)(1-\sin u)}{(1+\sin u)^2} du$$

$$= \int \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} du \qquad \text{...} (10)$$

لنعبر عن بسط الدالة المتكاملة في (10) على الصورة :

$$1 - \sin u = 2 - (1 + \sin u)$$

$$\therefore I = \int \frac{2-(1+\sin u)}{(1+\sin u)} du$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{1+\sin u} - 1 \right\} du$$

$$= 2\int \frac{1}{1+\sin u} du - \int du \qquad ...(11)$$

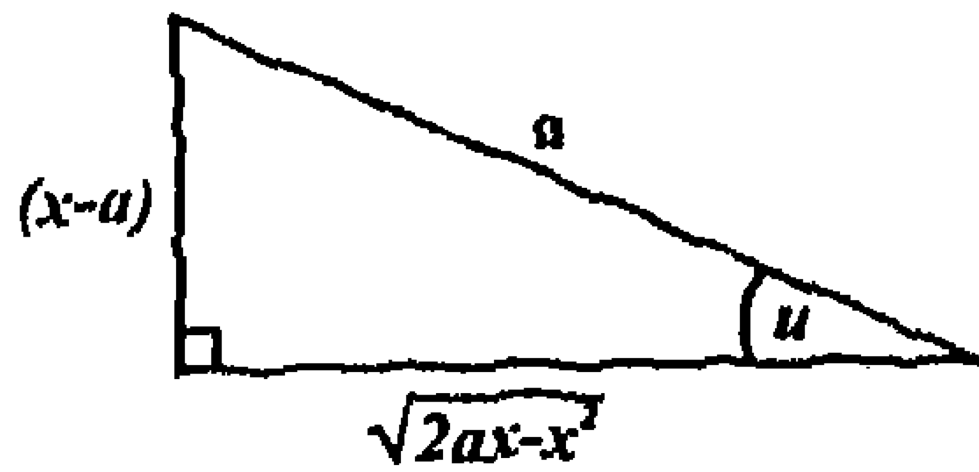
وباستخدام القاعدة *(9)* لحساب التكامل الأول في الطرف الأيمن في *(11)* :

$$I = 2\left\{ -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \right\} - u + C \qquad ...(12)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = \sec u - \tan u \qquad ...(13)$$

$$I = -2\{\sec u - \tan u\} - u + C \qquad ...(14)$$



وباستخدام *(4)* في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\tan u$ ، $\sec u$ بدلالة x والتعويض بهما في *(14)* نجد أن :

$$I = -2\left\{ \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}} \right\} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$= -2\left(\frac{2a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} \right) - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \qquad ...(15)$$

باستخراج x كعامل مشترك من الجذر التربيعي في مقام الحد الأول في الطرف الأيمن في *(15)* وأيضا التعبير عن $(2a-x)$ في الصورة $\left(\sqrt{2a-x}\right)^2$ ، نجد ان :

$$I = -2\left\{ \frac{\left(\sqrt{2a-x}\right)^2}{\sqrt{x}\,\sqrt{2a-x}} \right\} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C \qquad ...(16)$$

من *(16)* و *(1)* يثبت صحة المطلوب .

$$\langle 161 \rangle \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = \frac{3a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \frac{(x+3a)}{2}\sqrt{2ax-x^2} + C \;; a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن المقدار تحت علامة الجذر التربيعي في (1) في الصورة التالية :

$$\begin{aligned} 2ax-x^2 &= a^2-a^2+2ax-x^2 \\ &= a^2-(x^2-2ax+a^2) \\ &= a^2-(x-a)^2 \qquad .....(2) \end{aligned}$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}dx \qquad .....(3)$$

لحساب I في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x-a = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4)$$

ومن (4) نحصل على x في الصورة :

$$x = a(1+\sin u) \qquad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن $(x-a), x, dx$ من (6) ، (5) ، (4) على الترتيب في (3) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a^2(1+\sin u)^2}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}(a\cos u\, du) \\ &= a^2\int \frac{(1+\sin u)^2}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\, du \qquad .....(7) \end{aligned}$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد أن :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$$
$$\therefore \cos^2 u = 1-\sin^2 u \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن $(1-\sin^2 u)$ من (8) في (7) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= a^2\int \frac{(1+\sin u)^2}{\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\, du \\ &= a^2\int (1+\sin u)^2 du \\ &= a^2\int (1+2\sin u+\sin^2 u)du \\ &= a^2\int du + 2a^2\int \sin u\, du + a^2\int \sin^2 u\, du \end{aligned}$$

ولحساب $\int \sin^2 u\, du$, $\int \sin u\, du$ نستخدم القانونين (4) ، (3) على الترتيب ، لنجد ان :

$$I = a^2 u + 2a^2(-\cos u) + a^2\left\{\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right\} + C$$

$$= \left(a^2 u + \frac{a^2 u}{2}\right) - 2a^2 \cos u - \frac{a^2}{4}\sin 2u + C \quad .....(9)$$

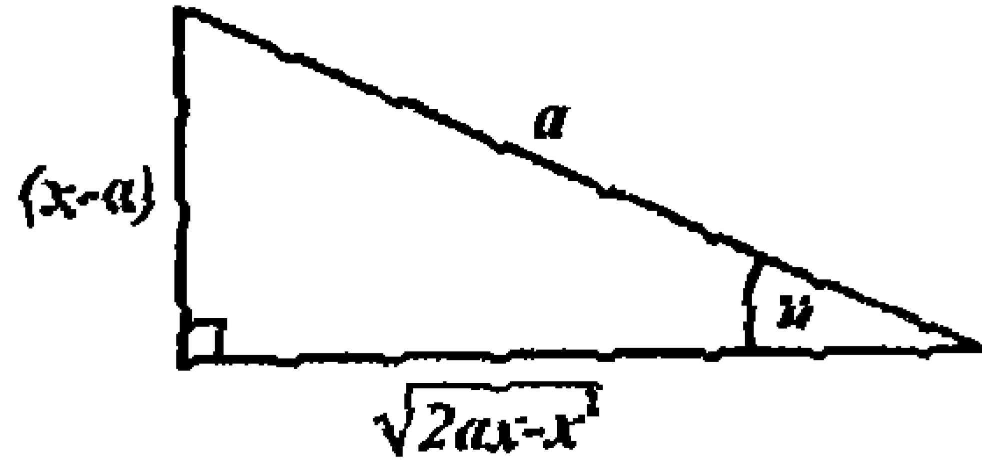
وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$I = \frac{3a^2}{2}u - 2a^2 \cos u - \frac{a^2}{2}\sin u \cos u + C$$

$$= \frac{3a^2}{2}u - (4 + \sin u)\frac{a^2}{2}\cos u + C \quad ...(10)$$

باستخدام (4) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cos u$ ، $\sin u$ بدلالة x والتعويض بقيمة كل منهما في (10) ، نجد ان :



$$I = \frac{3a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \left\{4 + \frac{x-a}{a}\right\}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} + C$$

$$= \frac{3a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \frac{(3a+x)}{2}\sqrt{2ax-x^2} + C \quad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

162

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ; \quad a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a \tan u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad .....(2)$$

بإيجاد التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = d\,(a\tan u)$$
$$= a\sec^2 u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a^2 + a^2\tan^2 u}\left(a\sec^2 u\,du\right)$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\tan^2 u}\sec^2 u\,du \qquad .....(4)$$

من قوانين حساب المثلثات ، نجد ان :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

بالتعويض عن قيمة $1+\tan^2 u$ من (5) في (4) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du$$
$$= \frac{1}{a}\int du$$
$$= \frac{1}{a}u + C \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (6) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب.

163	$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|a^2+x^2\right| + C$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x}{a^2+x^2}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\tan u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(2)$$

بإيجاد التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sec^2 u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a \tan u}{a^2 + a^2 \tan^2 u} a \sec^2 u \, du$$

$$= \int \frac{\tan u}{1 + \tan^2 u} \sec^2 u \, du \qquad \text{.....}(4)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

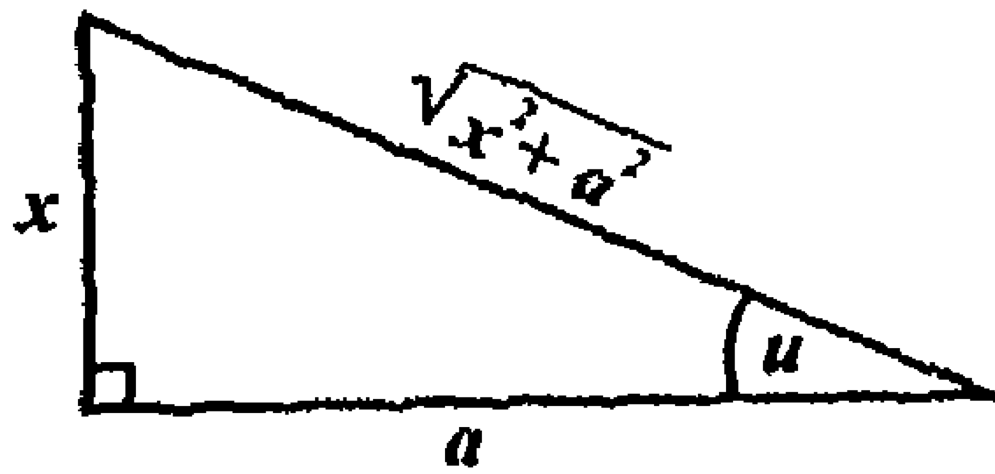
$$I = \int \frac{\tan u}{\sec^2 u} \sec^2 u \, du$$

$$= \int \tan u \, du \qquad \text{.....}(5)$$

ولحساب I في (5) نستخدم العلاقة (19) ، فنجد أن :

$$I = \ln \left| \sec u \right| + C \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\sec u$ بدلالة x والتعويض بها في (6) ، نجد أن :



$$I = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| + C$$

$$= \ln \left| \sqrt{x^2 + a^2} \right| - \ln \left| a \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + a^2 \right| + C \qquad \text{.....}(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب .

164

$$\int \frac{1}{x\left(a^2 + x^2\right)} dx = \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 + x^2} \right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\left(a^2 + x^2\right)} dx \qquad \text{.....}(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{1}{x\left(a^2+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{a^2+x^2} \qquad \text{..... (2)}$$

حيث B , A ثابتان ينبغي تعيين قيمة كل منهما ، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x\left(a^2+x^2\right)}=\frac{A\left(a^2+x^2\right)+x\left(Bx+C\right)}{x\left(a^2+x^2\right)} \qquad \text{..... (3)}$$

بضرب طرفي (3) في $x\left(a^2+x^2\right)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$1=A\left(a^2+x^2\right)+x\left(Bx+C\right)$$

$$=Aa^2+Ax^2+Bx^2+Cx \qquad \text{..... (4)}$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة A نضع x تساوي الصفر في (4) ، لنجد أن :

$$1=Aa^2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{a^2} \qquad \text{..... (5)}$$

ولإيجاد قيمة C, B نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية غير الصفر ولتكن $x=1$ والتعويض عن $A=\frac{1}{a^2}$ من (5) ، لنجد أن :

$$1=\frac{1}{a^2}\left(a^2\right)+\frac{1}{a^2}(1)+B\,(1)+C\,(1)$$

$$\therefore\ B+C=-\frac{1}{a^2} \qquad \text{..... (6)}$$

ثم نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية أخرى ولتكن $x=-1$ ، والتعويض عن $A=\frac{1}{a^2}$ من (5) ، لنجد أن :

$$1=\frac{1}{a^2}\left(a^2\right)+\frac{1}{a^2}(-1)^2+B\,(-1)^2+C\,(-1)$$

$$B-C=-\frac{1}{a^2} \qquad \text{..... (7)}$$

بحل المعادلتين (7) ، (6) حلاً آنياً ، نجد أن :

$$B=-\frac{1}{a^2} \quad , \quad C=0 \qquad \text{..... (8)}$$

بالتعويض بقيم A , B , C من (8) ، (5) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x(a^2+x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{x}{a^2(a^2+x^2)}$$

$$=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{x}-\frac{x}{a^2+x^2}\right\} \qquad \text{.....(9)}$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x(a^2+x^2)}$ من (9) في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{x}-\frac{x}{a^2+x^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\left\{\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{a^2+x^2}dx\right\} \qquad \text{...(10)}$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن في (10) على الصورة :

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C \qquad \text{...(11)}$$

والتكامل الثاني في الطرف الأيمن في (10) اثبتنا في العلاقة (163) ان :

$$\int\frac{x}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln|a^2+x^2|+C \qquad \text{...(12)}$$

باستخدام (12) ، (11) في (10) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a^2}\left\{\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|a^2+x^2|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left\{2\ln|x|-\ln|a^2+x^2|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left\{\ln|x^2|-\ln|a^2+x^2|\right\}+C \qquad \text{...(13)}$$

ومن قوانين اللوغاريتمات إذا كانت $u>0\,,\,v>0$ فإن :

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$$

فنحصل من (13) على I في الصورة :

$$\therefore I=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2+x^2}\right|+C \qquad \text{...(14)}$$

من (14) و (1) يثبت صحة المطلوب .

لاحظ: $\left|\frac{x^2}{a^2+x^2}\right|=\frac{x^2}{a^2+x^2}$

$$\boxed{165}\quad \int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx=\frac{x}{2a^2\left(a^2+x^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad ; a\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\tan u \qquad ; u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{.....}(2)$$

بإيجاد التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\sec^2 u\,du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{\left(a^2+a^2\tan^2 u\right)^2}\left(a\sec^2 u\,du\right)$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{\sec^2 u}{\left(1+\tan^2 u\right)^2}du \qquad \text{.....}(4)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u=\sec^2 u \qquad ; u\neq\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad \text{.....}(5)$$

$$I=\frac{1}{a^3}\int \frac{\sec^2 u}{\left(\sec^2 u\right)^2}du$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sec^2 u}du \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos u=\frac{1}{\sec u} \qquad \text{.....}(7)$$

$$I=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 u\,du \qquad \text{.....}(8)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos^2 u=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right) \qquad \text{.....}(9)$$

$$I=\frac{1}{a^3}\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right)du$$

$$=\frac{1}{2a^3}\int du+\frac{1}{2a^3}\int \cos 2u\,du \qquad \text{...}(10)$$

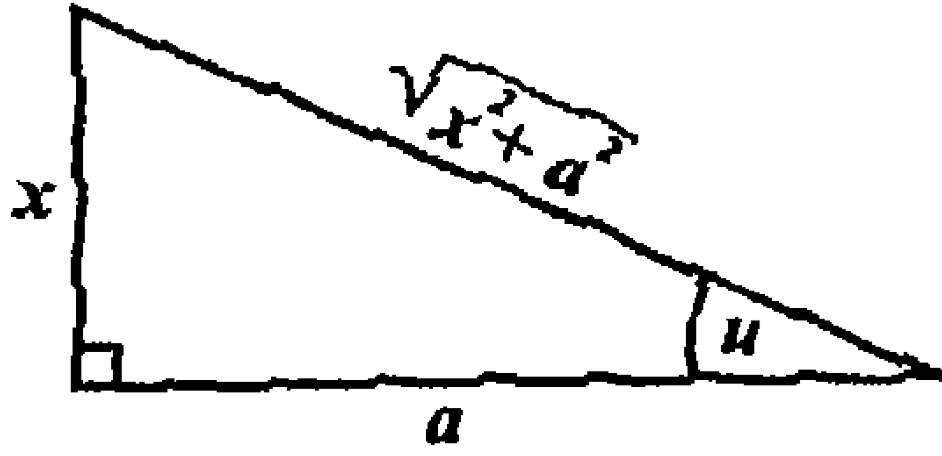
ولحساب التكامل الثاني في الطرف الأيمن في (10) ، نستخدم العلاقة (11) ، لنجد أن :

$$I = \frac{1}{2a^3}u + \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right) + C \quad ...(11)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u \quad ...(12)$$

$$I = \frac{1}{2a^3}u + \frac{1}{2a^3}\sin u \cos u + C \quad ...(13)$$



باستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cos u$ ، $\sin u$ بدلالة x والتعويض بقيمة كل منهما في (13) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2a^3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right) + C \quad ...(14)$$

من (14) و (1) يثبت صحة المطلوب .

166

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}dx \qquad ; a \neq 0 , n > 1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx \quad .....(1)$$

لنعبر عن بسط الدالة المتكاملة في (1) في الصورة التالية :

$$1 = \frac{1}{a^2}(a^2+x^2-x^2) \quad .....(2)$$

باستخدام (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a^2}\frac{a^2+x^2-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\left\{\frac{a^2+x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}-\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\int\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx-\int\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\int\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx-I_1\right\} \qquad .....(3)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1 = \int\frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx \qquad .....(4)$$

ولحساب I_1 في (4) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = x \qquad .....(5)$$

$$dv = \frac{x\,dx}{\left(a^2+x^2\right)^n} \qquad .....(6)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (5) ، نجد أن :

$$du = dx \qquad .....(7)$$

وبتكامل الطرفين في (6) ، نجد أن :

$$v = -\frac{1}{2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} \qquad .....(8)$$

وباستخدام (6) ، (5) في (4) ، نجد أن :

$$I_1 = \int u\,dv \qquad .....(9)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (9) ، نجد أن :

$$I_1 = uv - \int v\,du \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن u,du,v من (8) ، (7) ، (5) على الترتيب في (10) ، نجد أن :

$$I_1 = x\left\{-\frac{1}{2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right\}-\int\left\{-\frac{1}{2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right\}dx$$

$$= -\frac{x}{2\left(n-1\right)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2\left(n-1\right)}\int\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن I_1 من (11) في (3) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}dx - \left(-\frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}dx\right)\right]$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}dx \quad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

167

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \sqrt{a^2+x^2} \quad .....(2)$$

$$dv = dx \quad .....(3)$$

وبإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = x \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)x - \int x\left(\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \quad .....(8)$$

لنعبر عن بسط الدالة المتكاملة في الطرف الأيمن في (8) على الصورة :

$$x^2 = a^2 + x^2 - a^2 \quad .....(9)$$

$$\therefore\ I = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \left\{\int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\right\}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \qquad \ldots(10)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأول في الطرف الأيمن في *(10)* هو التكامل في *(1)*، وأن التكامل الثاني هو التكامل في العلاقة *(177)*، نجد أن :

$$I = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\therefore\ I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \ldots(11)$$

من *(11)* و *(1)* يثبت صحة المطلوب .

168

$$\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

من قوانين التفاضلات ، معلوم لدينا أن :

$$d\left(x^2\right) = 2x\,dx$$

$$\therefore\ x\,dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) \qquad \ldots\ldots(2)$$

ولأن إضافة (أو طرح) ثابت من دالة لا يغير من تفاضلة الدالة ، نجد أن :

$$x\,dx = \frac{1}{2}d\left(a^2+x^2\right) \qquad \ldots\ldots(3)$$

بالتعويض عن xdx من *(3)* في *(1)* ، نجد أن :

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{2}d\left(a^2+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(a^2+x^2\right)^{1/2} d\left(a^2+x^2\right) \qquad \ldots\ldots(4)$$

وباستخدام الصيغة الأساسية للتكامل :

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad ; \; n \neq -1$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} + C \qquad \text{.....} (5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$169 \qquad \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x\left(a^2 + 2x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2}}{8} - \frac{a^4}{8} \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \qquad \text{.....} (1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \sinh u \qquad \text{.....} (2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \cosh u \, du \qquad \text{.....} (3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \left(a^2 \sinh^2 u\right) \sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2 u}\, \left(a \cosh u \, du\right)$$

$$= a^4 \int \sinh^2 u \sqrt{1 + \sinh^2 u}\, \cosh u \, du \qquad \text{.....} (4)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = \sinh^2 u + 1 \qquad \text{.....} (5)$$

$$I = a^4 \int \sinh^2 u \sqrt{\cosh^2 u}\, \cosh u \, du$$

$$= a^4 \int \sinh^2 u \; \cosh^2 u \; du \qquad \text{.....} (6)$$

وبضرب دالة التكامل في (6) بسطا ومقاما في (4) ، نجد ان :

$$I = \frac{a^4}{4} \int \left(2 \sinh u \; \cosh u\right)^2 du \qquad \text{.....} (7)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2u = 2 \sinh u \; \cosh u \qquad \text{.....} (8)$$

$$I = \frac{a^4}{4}\int sinh^2 2u\, du \qquad .....(9)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$cosh 2\theta = 1 + 2 sinh^2 \theta$$

$$\therefore\ sinh^2 \theta = \frac{1}{2}(cosh 2\theta - 1)$$

باستخدام المتطابقة أعلاه لحساب $sinh^2 2u$ في (9)، نجد أن:

$$\therefore\ I = \frac{a^4}{4}\int \frac{1}{2}(cosh 4u - 1)du$$

$$= \frac{a^4}{8}\int cosh 4u\, du - \frac{a^4}{8}\int du \qquad ...(10)$$

وباستخدام العلاقة (77) لحساب $\int cosh 4u\, du$ في (10)، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{8}\left(\frac{sinh 4u}{4}\right) - \frac{a^4}{8}u + C$$

$$= \frac{a^4}{32} sinh 4u - \frac{a^4}{8}u + C \qquad ...(11)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (8)، نجد أن :

$$sinh 4u = 2 sinh 2u\ \ cosh 2u \qquad ...(12)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (8) وأيضا المتطابقة الزائدية :

$$cosh 2u = cosh^2 u + sinh^2 u \qquad ...(13)$$

وذلك لتبسيط المتطابقة (12)، نجد أن :

$$sinh 4u = 2\,(2 sinh u\ \ cosh u)(cosh^2 u + sinh^2 u) \qquad ...(14)$$

بالتعويض عن $sinh 4u$ من (14) في (11)، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{32}\{4 sinh u\ \ cosh u\,(cosh^2 u + sinh^2 u)\} - \frac{a^4}{8}u + C$$

$$= \frac{a^4}{8} sinh u\ \ cosh u\,(cosh^2 u + sinh^2 u) - \frac{a^4}{8}u + C \qquad ...(15)$$

من (2)، نجد أن :

$$sinh u = \frac{x}{a}\ \ ,\ \ u = sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad ...(16)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب $cosh u$، نجد أن :

$$cosh u = \sqrt{sinh^2 u + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \qquad ...(17)$$

بالتعويض عن $sinh u , u , cosh u$ من (17) ، (16) على الترتيب في (15) ، نجد ان :

$$I = \frac{a^4}{8}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)\left(\frac{x^2+a^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{a^4}{8}sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

$$= \frac{x}{8}\sqrt{a^2+x^2}\left(a^2+2x^2\right)-\frac{a^4}{8}sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad ...(18)$$

من (18) و (1) يثبت صحة المطلوب .

170

$$\int x^n\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad ; \; n \neq -2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n\sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x^{n-1} \qquad .....(2)$$

$$dv = \sqrt{a^2+x^2}\; x\,dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = (n-1)\,x^{n-2}\,dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$\int dv = \int \sqrt{a^2+x^2}\; x\,dx$$

$$= \int \left(a^2+x^2\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{2}d\left(a^2+x^2\right)\right\}$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(x^{n-1}\right)\left\{ \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} \right\} - \int \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}(n-1)x^{n-2}dx \qquad .....(8)$$

بضرب طرفي (8) في 3 ، نجد أن :

$$3I = x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx$$

$$= x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(a^2+x^2\right)\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$= x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(x^2\right)\sqrt{a^2+x^2}\,dx - (n-1)\int x^{n-2}\left(a^2\right)\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$= x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n}\sqrt{a^2+x^2}\,dx - (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad ...(9)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأول في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$3I = x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)I - (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$3I + (n-1)I = x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad ...(10)$$

بقسمة طرفي (10) على $(n+2)$ ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\langle 171 \rangle \quad \int \left(a^2+x^2\right)^{3/2} dx = \frac{x}{8}\left(2x^2+5a^2\right)\sqrt{a^2+x^2}+\frac{3a^4}{8}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \left(a^2+x^2\right)^{3/2} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \cosh u \, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب، في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \left(a^2+a^2\sinh^2 u\right)^{3/2} \left(a \cosh u \, du\right)$$

$$= a^4 \int \left(1+\sinh^2 u\right)^{3/2} \cosh u \, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+\sinh^2 u = \cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = a^4 \int \left(\cosh^2 u\right)^{3/2} \cosh u \, du$$

$$= a^4 \int \cosh^4 u \, du \qquad .....(6)$$

ولنكتب $\cosh^4 u$ في ابسط صورة :

$$\cosh^4 u = \left(\cosh^2 u\right)^2 \qquad .....(7)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = \frac{1}{2}\left(\cosh 2u + 1\right) \qquad .....(8)$$

$$\cosh^4 u = \left\{\frac{1}{2}\left(\cosh 2u+1\right)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cosh^2 2u + 2\cosh 2u + 1\right) \qquad .....(9)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (8) للتعويض عن $\cosh^2 2u$ في (9) ، نجد ان :

$$\cosh^4 u = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(\cosh 4u+1\right)+2\cosh 2u+1\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cosh 4u + 1 + 4\cosh 2u + 2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cosh 4u + 4\cosh 2u + 3\right) \qquad ...(10)$$

التعويض عن $cosh^4 u$ من (10) في (6)، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{8}\int (cosh 4u + 4 cosh 2u + 3) du$$

$$= \frac{a^4}{8}\left\{\int cosh 4u\, du + 4\int cosh 2u\, du + 3\int du\right\} \quad ...(11)$$

وباستخدام العلاقة (77) لحساب التكاملين الأول والثاني، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{\frac{1}{4} sinh 4u + 4\left(\frac{1}{2} sinh 2u\right) + 3u\right\} + C \quad ...(12)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$sinh 2\theta = 2 sinh\theta \; cosh\theta \quad ...(13)$$

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{\frac{1}{4}(2 sinh 2u \; cosh 2u) + 4(sinh u \; cosh u) + 3u\right\} + C$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (13) وأيضا المتطابقة الزائدية :

$$cosh 2u = 1 + 2 sinh^2 u \quad ...(14)$$

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{\frac{1}{2}(2 sinh u \; cosh u)(1 + 2 sinh^2 u) + 4 sinh u \; cosh u + 3u\right\} + C$$

$$= \frac{a^4}{8}\left\{sinh u \; cosh u\,(2 sinh^2 u + 5) + 3u\right\} + C \quad ...(15)$$

من (2) نجد أن :

$$u = sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad , \quad sinh u = \frac{x}{a} \quad ...(16)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب $cosh u$ ، نجد أن :

$$cosh u = \sqrt{1 + sinh^2 u}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \quad ...(17)$$

بالتعويض عن $sinh u$, u , $cosh u$ من (17)، (16) على الترتيب في (15)، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\left(2\frac{x^2}{a^2} + 5\right) + 3 sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C$$

$$= \frac{x}{8}(2x^2 + 5a^2)\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{3a^4}{8} sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ...(18)$$

من (18)، (1) يثبت صحة المطلوب .

$$172 \qquad \int x\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{5}\left(a^2+x^2\right)^{5/2}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x=a\tan u \qquad ;u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(2)$$

$$dx=a\sec^2 u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I&=\int(a\tan u)\left(a^2+a^2\tan^2 u\right)^{3/2}\left(a\sec^2 u\,du\right)\\ &=a^5\int\tan u\left(1+\tan^2 u\right)^{3/2}\sec^2 u\,du \qquad .....(4)\end{aligned}$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u=\sec^2 u \qquad ;u\neq\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(5)$$

$$\begin{aligned} I&=a^5\int\tan u\left(\sec^2 u\right)^{3/2}\sec^2 u\,du\\ &=a^5\int\sec^4 u(\sec u\ \tan u\ du)\\ &=a^5\int\sec^4 u\ d(\sec u) \qquad .....(6)\end{aligned}$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (6) على الصورة $\int z^n dz$

$$I=a^5\left(\frac{\sec^5 u}{5}\right)+C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\sec u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية (5) ، نجد ان :

$$\begin{aligned}\sec u&=\sqrt{1+(x/a)^2}\\ &=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \qquad .....(8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I&=\frac{a^5}{5}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)^5+C\\ &=\frac{1}{5}\left(a^2+x^2\right)^{5/2}+C \qquad .....(9)\end{aligned}$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

173

$$\int \frac{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}{x}dx = \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} + a^2\sqrt{a^2+x^2} - a^3 \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}{x}dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة بالتكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\tan u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{.....}(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec^2 u\, du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\left(a^2+a^2\tan^2 u\right)^{3/2}}{a\tan u} a\sec^2 u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{\left(1+\tan^2 u\right)^{3/2}}{\tan u}\sec^2 u\, du \qquad \text{.....}(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \qquad \text{.....}(5)$$

$$I = a^3 \int \frac{\left(\sec^2 u\right)^{3/2}}{\tan u}\sec^2 u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{\sec^4 u}{\tan u}\sec u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{\left(1+\tan^2 u\right)^2}{\tan u}\sec u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{1+2\tan^2 u+\tan^4 u}{\tan u}\sec u\, du$$

$$= a^3 \int \left(\frac{1}{\tan u}+2\tan u+\tan^3 u\right)\sec u\, du$$

$$= a^3 \left\{ \int \frac{1}{\tan u}\sec u\, du + 2\int \tan u\sec u\, du + \int \tan^3 u\sec u\, du \right\}$$

$$=a^3\left\{\int cosec\,u\;du+2\int \tan u\;\sec u\;du+\int\left(\sec^2 u-1\right)\tan u\;\sec u\;du\right\}$$

$$=a^3\left\{\int cosec\,u\;du+2\int d\left(\sec u\right)+\int \sec^2 u\;d\left(\sec u\right)-\int d\left(\sec u\right)\right\}$$

$$=a^3\left\{\int cosec\,u\;du+\int d\left(\sec u\right)+\int \sec^2 u\;d\left(\sec u\right)\right\}$$

$$=a^3\int cosec\,u\;du+a^3\int d\left(\sec u\right)+a^3\int \sec^2 u\;d\left(\sec u\right) \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل الأول في الطرف الأيمن نستخدم القاعدة (28)، والتكامل الثاني باستخدام تعريف التكامل، والتكامل الثالث على الصورة $\int z^n\,dz$

$$I=a^3\left\{-\ln\left|cosec\,u+\cot u\right|\right\}+a^3\sec u+a^3\frac{\sec^3 u}{3}+C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\sec u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية (5)، نجد ان :

$$\sec u=\sqrt{1+\tan^2 u}$$
$$=\sqrt{1+\left(x/a\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \qquad .....(8)$$

ولحساب $\cot u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\cot u=\frac{1}{\tan u}$$
$$=\frac{1}{\left(x/a\right)}$$
$$=\frac{a}{x} \qquad .....(9)$$

ولحساب $cosec\,u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$cosec\,u=\frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u}$$
$$=\frac{\sqrt{1+\left(x/a\right)^2}}{\left(x/a\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن $\sec u$, $\cot u$, $cosec\,u$ من (10)، (9)، (8) على الترتيب في (7)، نجد ان :

$$I=a^3\left\{-\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right|\right\}+a^3\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)+\frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)^3+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}+a^2\sqrt{a^2+x^2}-a^3\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x}\right|+C \quad \text{.....}(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

174

$$\int x^n\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}-\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx\ ;\ n\neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x^n\left(a^2+x^2\right)^{3/2}dx \quad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\left(a^2+x^2\right)^{3/2} \quad \text{.....}(2)$$

$$dv=x^n dx \quad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=\frac{3}{2}\left(a^2+x^2\right)^{1/2}(2x\,dx)$$

$$=3x\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad \text{.....}(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v=\int x^n\,dx$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{.....}(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \quad \text{.....}(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \quad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\left(a^2+x^2\right)^{3/2}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{3x\sqrt{a^2+x^2}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}-\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad \text{.....}(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx = \frac{1}{n+1} x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx$$

175

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^n dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^n \qquad .....(2)$$

$$dv = dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = n\,x\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^{n-2} dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n (x) - \int x \cdot nx\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \\ &= x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n - n\int x^2\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \\ &= x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n - n\, I_1 \qquad .....(8) \end{aligned}$$

حيث افترضنا أن :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^2\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \\ &= \int \left\{\left(a^2+x^2\right) - a^2\right\}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \\ &= \int \left(a^2+x^2\right)\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx - a^2\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \\ &= \int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx - a^2\int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \qquad .....(9) \end{aligned}$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأول في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I_1 = I - a^2 \int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (10) في (8) ، نجد أن :

$$I = x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n - n\left\{I - a^2 \int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx\right\}$$

$$I + nI = x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n + na^2 \int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(11)$$

$$I = \frac{1}{n+1} x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n + \frac{na^2}{n+1} \int \left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(12)$$

من (12) ، (1) يثبت صحة المطلوب .

176

$$\int x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^n dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\tan u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec^2 u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int a\tan u\left(\sqrt{a^2+a^2\tan^2 u}\right)^n a\sec^2 u\, du$$

$$= a^{n+2} \int \tan u\left(\sqrt{1+\tan^2 u}\right)^n \sec^2 u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = a^{n+2} \int \tan u\left(\sqrt{\sec^2 u}\right)^n \sec^2 u\, du$$

$$= a^{n+2} \int \sec^{n+1} u\,(\sec u\ \tan u\ du)$$

$$= a^{n+2} \int \sec^{n+1} u\,\{d\,(\sec u)\} \qquad .....(6)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (6) على الصورة $\int z^n dz$

$$I = a^{n+2}\frac{\sec^{n+2} u}{n+2} + C \quad .....(7)$$

ولحساب $\sec u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة (5) ، حيث :

$$\sec u = \sqrt{1+\tan^2 u}$$
$$= \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$I = a^{n+2}\frac{1}{n+2}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)^{n+2} + C$$
$$= \frac{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C \quad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

177

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sinh u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cosh u\, du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}}(a\cosh u\, du)$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\cosh u\, du \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u}} \cosh u \, du$$

$$= \int du$$

$$= u + C \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) ، نجد أن :

$$I = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad .....(7)$$

من تعريف دالة الجيب الزائدي العكسية ، نجد أن :

$$\sinh^{-1}\theta = \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}\right)$$

$$\therefore I = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + C$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) - \ln a + C$$

فإذا لاحظنا أن $\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) > 0$ وذلك لجميع قيم x ، فإن :

$$I = \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

178

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^n} dx = \frac{x\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)} + \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^{n-2}} dx \quad ; \; n \neq 2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^n} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\tan u \qquad ;u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec^2 u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 + a^2\tan^2 u}\right)^n}\left(a\sec^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{1+\tan^2 u}\right)^n}\sec^2 u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ;u \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^{n-1}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\sec^2 u}\right)^n}\sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}}\int \frac{1}{\sec^{n-2} u}\, du$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}}\int \cos^{n-2} u\, du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) نستخدم العلاقة (13) ، لنجد أن :

$$I = \frac{1}{a^{n-1}}\left\{\frac{\cos^{n-3} u\ \sin u}{(n-2)} + \frac{(n-3)}{(n-2)}\int \cos^{n-4} u\, du\right\} \qquad .....(7)$$

ولحساب $\cos u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة :

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(x/a)^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad .....(8)$$

ولحساب $\sin u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة :

$$\sin u = \frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1+(x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad .....(9)$$

ولحساب du بدلالة x نستخدم (3) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{a\sec^2 u}dx$$

$$= \frac{1}{a}\cos^2 u\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{a}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^2}dx \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن $\cos u , \sin u , du$ من (10) ، (9) ، (8) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^{n-1}}\left\{\frac{\left(a/\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-3}\left(x/\sqrt{a^2+x^2}\right)}{(n-2)} + \frac{(n-3)}{(n-2)}\int\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)^{n-4}\cdot\frac{a\,dx}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{1}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^{n-2}}dx \qquad ....(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب.

179

$$\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sqrt{a^2+x^2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \qquad .....(1)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن:

$$d\left(x^2\right) = 2x\,dx$$

$$\therefore\ x\,dx = \frac{1}{2} d\left(x^2\right) \qquad .....(2)$$

ولأن إضافة (أو طرح) ثابت إلى (أو من) دالة لا يغير من تفاضلة الدالة، نجد ان :

$$x\,dx = \frac{1}{2} d\left(a^2 + x^2\right) \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن xdx من (3) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{(1/2)\, d\left(a^2 + x^2\right)}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(a^2 + x^2\right)}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad .....(4)$$

والدالة المتكاملة في (4) على الصورة $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ وحيث ان :

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}\left\{2\sqrt{a^2 + x^2}\right\} + C$$

$$= \sqrt{a^2 + x^2} + C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب.

180	$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} dx = -\frac{1}{a} \ln\left\lvert \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right\rvert + C$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \tan u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نحصل على :

$$dx = a \sec^2 u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a\tan u\sqrt{a^2+a^2\tan^2 u}} a\sec^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 u}{\tan u\sqrt{1+\tan^2 u}} du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 n = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 u}{\tan u\sqrt{\sec^2 u}} du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec u}{\tan u} du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos u}\cdot\frac{\cos u}{\sin u} du$$

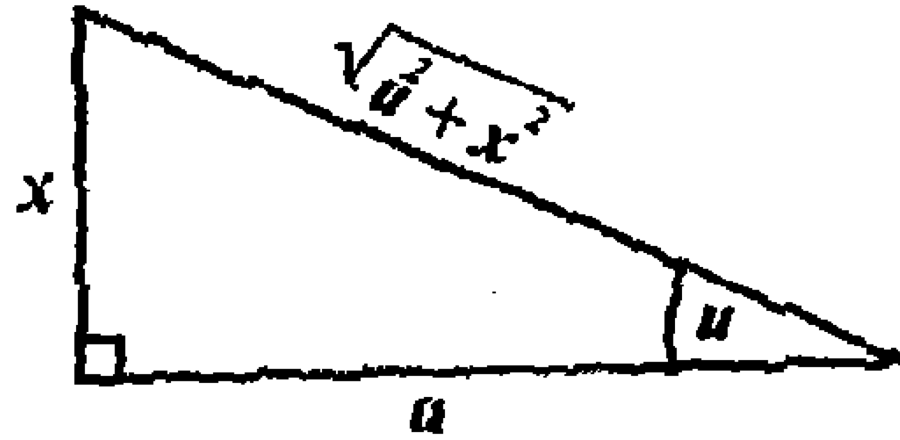
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin u} du$$

$$= \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec} u\, du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) ، نستخدم العلاقة (28) ، نجد ان :

$$I = -\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{cosec} u + \cot u\right| + C \qquad .....(7)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cot u$ ، $\operatorname{cosec} u$ بدلالة x والتعويض بقيمة كل منهما في (6) ، نجد أن:



$$I = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب.

181

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cosh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a^2\sinh^2 u}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}}(a\cosh u\, du)$$

$$= a^2\int \frac{\sinh^2 u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\cosh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = 1+\sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = a^2\int \frac{\sinh^2 u}{\sqrt{\cosh^2 u}}\cosh u\, du$$

$$= a^2\int \sinh^2 u\, du \qquad .....(6)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh^2 u = \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1) \qquad .....(7)$$

$$I = a^2\int \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1)du$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \cosh 2u\, du - \frac{a^2}{2}\int du$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sinh 2u}{2}\right) - \frac{a^2}{2}u + C \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u \qquad .....(9)$$

$$I = \frac{a^2}{2}\sinh u \cosh u - \frac{a^2}{2}u + C \qquad ...(10)$$

من (2) نحصل على $\sinh u$ بدلالة x في الصورة :

$$\sinh u = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad u = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad ...(11)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب $\cosh u$ ، نجد أن :

$$\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $\sinh u$, u , $\cosh u$ من (12) ، (11) على الترتيب في (10) نجد أن :

$$I = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

182

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2 x} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I في (1) سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cosh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2\sinh^2 u\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}}(a\cosh u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sinh^2 u\sqrt{1+\sinh^2 u}}\cosh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sinh^2 u\sqrt{\cosh^2 u}} \cosh u \, du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sinh^2 u} du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \operatorname{cosech}^2 u \, du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) ، نستخدم العلاقة (94) ، لنجد ان :

$$I = -\frac{1}{a^2}\coth u + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\coth u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة الزائدية ؛

$$\coth^2 u = 1 + \operatorname{cosech}^2 u$$

$$= 1 + \frac{1}{\sinh^2 u}$$

$$= 1 + \frac{a^2}{x^2}$$

$$\therefore \coth u = \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن $\coth u$ من (8) في (7) ، نجد ان ؛

$$I = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right) + C$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2 x} + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب.

183

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \sinh^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان؛

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\tan u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{.....}(2)$$

إجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec^2 u\, du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2 u}}{a\tan u}\left(a\sec^2 u\, du\right)$$

$$= a\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u}\sec^2 u\, du \qquad \text{.....}(4)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad \text{.....}(5)$$

$$I = a\int \frac{\sqrt{\sec^2 u}}{\tan u}\left(1+\tan^2 u\right)du$$

$$= a\int \frac{\sec u\left(1+\tan^2 u\right)}{\tan u}du$$

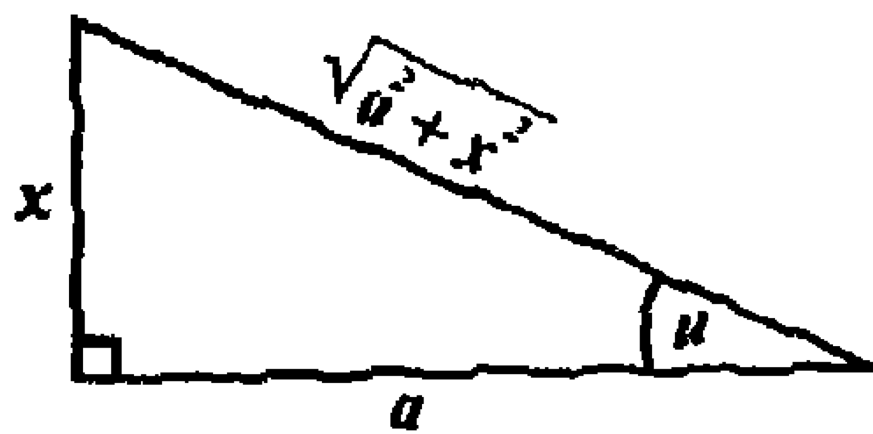
$$= a\int \left\{\frac{\sec u}{\tan u} + \sec u\tan u\right\}du$$

$$= a\int \operatorname{cosec} u\, du + a\int \sec u\tan u\, du \qquad \text{.....}(6)$$

ولحساب التكامل الأول في الطرف الأيمن من (6) نستخدم العلاقة (28) ، ولحساب التكامل الثاني نستخدم العلاقة (37) ، لنجد أن :

$$I = -a\ln\left|\operatorname{cosec} u + \cot u\right| + a\sec u + C \qquad \text{.....}(7)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cot u$ ، $\operatorname{cosec} u$ ، $\sec u$ والتعويض بقيمة كل منهما في (7) ، نجد أن :



$$I = -a\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \frac{a}{x}\right| + a\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + C$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 1}\right| + C \qquad \text{.....}(8)$$

وباستخدام تعريف دالة الجيب الزائدي العكسي ، حيث ان :

$$\sinh^{-1}\theta = \ln\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|$$

وذلك لجميع قيم θ الحقيقية .

$$\therefore\ I = \sqrt{a^2+x^2} - a\sinh^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

184

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cosh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 u}}{a^2\sinh^2 u}(a\cosh u\, du)$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+\sinh^2 u}}{\sinh^2 u}\cosh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+\sinh^2 u = \cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \int \frac{\sqrt{\cosh^2 u}}{\sinh^2 u}\cosh u\, du$$

$$= \int \frac{\cosh^2 u}{\sinh^2 u}\,du$$

$$= \int \coth^2 u\, du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\coth^2 u = \operatorname{cosech}^2 u + 1 \qquad .....(7)$$

$$I = \int \left(cosech^2 u + 1\right) du$$

$$= \int cosech^2 u\, du + \int du$$

$$= -\coth u + u + C$$ .....(8)

وباستخدام المتطابقة الزائدية (7) ، نجد ان :

$$I = -\sqrt{cosech^2 u + 1} + u + C$$ .....(9)

ومن (2) ، نجد ان :

$$u = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),\ \sinh u = \frac{x}{a} \Rightarrow cosech\ u = \frac{a}{x}$$ ...(10)

بالتعويض عن u , $cosech\ u$ من (10) في (9) ، نجد ان :

$$I = -\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} + \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + C$$ ...(11)

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

185

$$\int \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} dx$$ .....(1)

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a \tan u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$ .....(2)

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \sec^2 u\, du$$ .....(3)

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

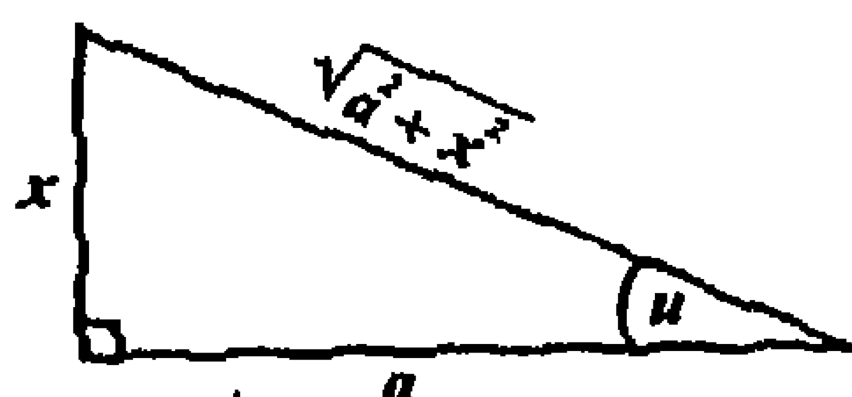
$$I = \int \frac{1}{\left(a^2 + a^2 \tan^2 u\right)^{3/2}} \left(a \sec^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 u}{\left(1 + \tan^2 u\right)^{3/2}} du$$ .....(4)

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u=\sec^2 u \qquad ; u\neq\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{\sec^2 u}{\sec^3 u}du$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sec u}du$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\cos u\,du$$
$$=\frac{1}{a^2}\sin u+C \qquad .....(6)$$



وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة $\sin u$ بدلالة x ثم التعويض بها في (6) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C \qquad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب .

186

$$\int\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\cosh u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن dx , x من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{a\sinh u}{\left(a^2+a^2\sinh^2 u\right)^{3/2}}\left(a\cosh u\,du\right)$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sinh u}{\left(1 + \sinh^2 u\right)^{3/2}} \cosh u \, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{\sinh u}{\left(\cosh^2 u\right)^{3/2}} \cosh u \, du$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sinh u}{\cosh^2 u} du$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cosh u} \cdot \frac{\sinh u}{\cosh u} du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائدتين :

$$\frac{1}{\cosh u} = \operatorname{sech} u \quad , \quad \frac{\sinh u}{\cosh u} = \tanh u$$

$$I = \frac{1}{a} \int \operatorname{sech} u \, \tanh u \, du$$

$$= -\frac{1}{a} \int d\left(\operatorname{sech} u\right)$$

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{sech} u + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\operatorname{sech} u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة

$$\operatorname{sech} u = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad .....(8)$$

$$I = -\frac{1}{a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{187} \quad \int \frac{1}{x(a^2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx\right\}$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x(a^2+x^2)^{3/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \frac{1}{x} \qquad .....(2)$$

$$dv = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = -\frac{1}{x^2}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx \qquad .....(5)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (5) هو العلاقة (185):

$$\therefore\ v = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \qquad .....(6)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(7)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (7) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن u, du, v من (6) ، (4) ، (2) على الترتيب في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{x}\left\{\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right\} - \int \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx\right\} \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

لاحظ: التكامل في الطرف الأيمن في (9) هو العلاقة (180) .

$$\boxed{188} \quad \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cosh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a^2\sinh^2 u}{(a^2+a^2\sinh^2 u)^{3/2}}(a\cosh u\, du)$$

$$= \int \frac{\sinh^2 u}{(1+\sinh^2 u)^{3/2}}\cosh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+\sinh^2 u = \cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \int \frac{\sinh^2 u}{(\cosh^2 u)^{3/2}}\cosh u\, du$$

$$= \int \frac{\sinh^2 u}{\cosh^2 u}du \qquad .....(6)$$

باستخدام المتطابقتين الزائدتين :

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} \quad , \quad \tanh^2 u = 1-\operatorname{sech}^2 u$$

$$I = \int \tanh^2 u\, du$$

$$= \int (1-\operatorname{sech}^2 u)du$$

$$= \int du - \int \operatorname{sech}^2 u\, du$$

$$= u - \tanh u + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $tanh\, u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$tanh\,u = \frac{sinh\,u}{\sqrt{1+sinh^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1+(x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad .....(8)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) وعن $tanh\, u$ من(8) ، نجد أن :

$$I = sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C \quad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

189 $$\int \frac{1}{x^2\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\,sinh\,u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\,cosh\,u\,du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2\,sinh^2 u\left(a^2+a^2\,sinh^2 u\right)^{3/2}}(a\,cosh\,u\,du)$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{sinh^2 u\left(1+sinh^2 u\right)^{3/2}}(cosh\,u\,du) \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+sinh^2 u = cosh^2 u \quad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\sinh^2 u\left(\cosh^2 u\right)^{3/2}}\cosh u\,du$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\sinh^2 u\ \cosh^2 u}du \qquad .....(6)$$

بضرب دالة التكامل في (6) بسطا و مقاما في 4 ، نجد أن :

$$I=\frac{4}{a^4}\int\frac{1}{\left(2\sinh u\ \cosh u\right)^2}du \qquad .....(7)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2u=2\sinh u\ \cosh u \qquad .....(8)$$

$$I=\frac{4}{a^4}\int\frac{1}{\sinh^2 2u}du \qquad .....(9)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\frac{1}{\sinh\theta}=\operatorname{cosech}\theta \qquad ...(10)$$

$$I=\frac{4}{a^4}\int\operatorname{cosech}^2 2u\,du \qquad ...(11)$$

ولحساب التكامل في (11) نستخدم العلاقة (94) ، لنجد أن :

$$I=\frac{4}{a^4}\left\{-\frac{1}{2}\coth 2u\right\}+C$$

$$=-\frac{2}{a^4}\coth 2u+C \qquad ...(12)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائدتين :

$$\coth 2u=\frac{\cosh 2u}{\sinh 2u} \qquad ...(13)$$

$$\cosh 2u=\cosh^2 u+\sinh^2 u \qquad ...(14)$$

ومع الأخذ في الاعتبار للمتطابقة الزائدية (8) ، نجد أن :

$$I=-\frac{2}{a^4}\frac{\cosh 2u}{\sinh 2u}+C$$

$$=\frac{-2}{a^4}\frac{\cosh^2 u+\sinh^2 u}{2\sinh u\ \cosh u}+C$$

$$=\frac{-1}{a^4}\left\{\frac{\cosh u}{\sinh u}+\frac{\sinh u}{\cosh u}\right\}+C \qquad ...(15)$$

ولحساب $\cosh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية (5) :

$$\cosh u=\sqrt{1+\sin^2 u}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \qquad ...(16)$$

بالتعويض عن $sinh\, u\ ,cosh\, u$ من (16) ، (2) في (15) ، نجد ان :

$$I = \frac{-1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{a^2+x^2}/a}{(x/a)}+\frac{(x/a)}{\left(\sqrt{a^2+x^2}/a\right)}\right\}+C$$

$$= \frac{-1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}+C \qquad ....(17)$$

من (17) و (1) يثبت صحة المطلوب .

190 $$\int\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}dx=\frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}\right\}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\, sinh\, u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\, cosh\, u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int\frac{1}{\left(a^2+a^2\, sinh^2 u\right)^{5/2}}(a\, cosh\, u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\left(1+sinh^2 u\right)^{5/2}}cosh\, u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+sinh^2 u = cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int\frac{1}{\left(cosh^2 u\right)^{5/2}}cosh\, u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int\frac{1}{cosh^4 u}du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\frac{1}{cosh\, u} = sech\, u \qquad .....(7)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int sech^4 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int sech^2 u \quad sech^2 u\, du \qquad .....(8)$$

من قوانين التفاضلات ، معلوم لدينا أن :

$$d\left(\tanh u\right) = sech^2 u\, du \qquad .....(9)$$

ومعلوم لدينا المتطابقة الزائدية :

$$1 - \tanh^2 u = sech^2 u \qquad ...(10)$$

باستخدام (10) ، (9) ، في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^4}\int \left(1 - \tanh^2 u\right) d\left(\tanh u\right)$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\int d\left(\tanh u\right) - \int \tanh^2 u\, d\left(\tanh u\right)\right\} \qquad ...(11)$$

ولحساب التكامل الثاني في الطرف الأيمن في (11) ، نستخدم صيغة التكامل:

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \qquad ; n \neq -1$$

$$I = \frac{1}{a^4}\left\{\tanh u - \frac{1}{3}\tanh^3 u\right\} + C \qquad ...(12)$$

ولحساب $\tanh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

$$= \frac{\sinh u}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}}$$

$$= \frac{\left(x/a\right)}{\sqrt{1 + \left(x/a\right)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad ...(13)$$

بالتعويض عن $\tanh u$ من (13) في (12) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\right\} + C \qquad ...(14)$$

من (14) و (1) يثبت صحة المطلوب .

191	$$\int \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}dx=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض، ولنفترض أن :

$$x=a\sinh u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\cosh u\,du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{a\sinh u}{\left(a^2+a^2\sinh^2 u\right)^{5/2}}\left(a\cosh u\,du\right)$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{\sinh u}{\left(1+\sinh^2 u\right)^{5/2}}\cosh u\,du \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1+\sinh^2 u=\cosh^2 u \quad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a^3}\int \frac{\sinh u}{\cosh^5 u}\cosh u\,du$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{\sinh u}{\cosh^4 u}du$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\cosh^3 u}\cdot\frac{\sinh u}{\cosh u}du \quad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائديتين :

$$\frac{1}{\cosh u}=\operatorname{sech} u \quad , \quad \frac{\sinh u}{\cosh u}=\tanh u \quad .....(7)$$

$$I=\frac{1}{a^3}\int \operatorname{sech}^3 u\tanh u\,du=\frac{1}{a^3}\int \operatorname{sech}^2 u\left(\operatorname{sech} u\tanh u\,du\right) \quad .....(8)$$

من قوانين التفاضلات ، معلوم لدينا أن :

$$d\left(\operatorname{sech} u\right)=-\operatorname{sech} u\tanh u\,du \quad .....(9)$$

باستخدام (9) في (8) ، نجد أن :

$$I=\frac{-1}{a^3}\int \operatorname{sech}^2 u\,d\left(\operatorname{sech} u\right) \quad ...(10)$$

ولحساب التكامل في (10) ، نستخدم صيغة التكامل :

$$\int z^n\, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

$$\therefore\ I = \frac{-1}{3a^3} \operatorname{sech}^3 u + C \qquad ...(11)$$

وباستخدام (5) لحساب $\cosh u$ ، نجد ان :

$$\begin{aligned} \cosh u &= \sqrt{1+\sinh^2 u} \\ &= \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \operatorname{sech} u = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $\operatorname{sech} u$ من (12) في (11) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{3a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)^3 + C \\ &= \frac{-1}{3}\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} + C \qquad ...(13) \end{aligned}$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

192

$$\int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}\, dx = \frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{5/2}}\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sinh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cosh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a^2 \sinh^2 u}{\left(a^2 + a^2 \sinh^2 u\right)^{5/2}} \left(a \cosh u \, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sinh^2 u}{\left(1 + \sinh^2 u\right)^{5/2}} \left(\cosh u \, du\right) \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sinh^2 u}{\left(\cosh^2 u\right)^{5/2}} \cosh u \, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u} du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sinh^2 u}{\cosh^2 u} \cdot \frac{1}{\cosh^2 u} du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائديتين :

$$\frac{\sinh u}{\cosh u} = \tanh u \quad , \quad \frac{1}{\cosh u} = \operatorname{sech} u \qquad .....(7)$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \tanh^2 u \operatorname{sech}^2 u \, du \qquad .....(8)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\tanh u\right) = \operatorname{sech}^2 u \, du \qquad .....(9)$$

وباستخدام (9) في (8) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^2} \int \tanh^2 u \, d\left(\tanh u\right) \qquad ...(10)$$

ولحساب التكامل في (10) نستخدم صيغة التكامل :

$$\int z^n \, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$$

$$I = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{3} \tanh^3 u \right\} + C \qquad ...(11)$$

وباستخدام (5) لحساب $\cosh u$ ، نجد أن :

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$\therefore \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

$$= \frac{(x/a)}{\left(\sqrt{a^2+x^2}/a\right)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $\tanh u$ من (12) في (11) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{3a^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)^3 + C$$

$$= \frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

193

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2-a^2}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sec u \quad ; u \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right); x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec u \tan u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x,dx من (3) ، (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2\sec^2 u - a^2} a\sec u \tan u\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sec^2 u - 1}\sec u \tan u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\tan^2 u = \sec^2 u - 1 \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\tan^2 u}\sec u \tan u\, du \qquad .....(6)$$

باستخدام المتطابقات الزائدية :

$$\sec u=\frac{1}{\cos u}\quad,\quad \tan u=\frac{\sin u}{\cos u}\quad,\quad \operatorname{cosec}\, u=\frac{1}{\sin u}$$

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\cos u}\cdot\frac{\cos u}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{a}\int \operatorname{cosec}\, u\, du \qquad .....(7)$$

ولحساب التكامل في (7) نستخدم القاعدة (28) ، لنجد ان :

$$I=\frac{1}{a}\left\{-\ln\left|\operatorname{cosec}\, u+\cot u\right|\right\}+C \qquad .....(8)$$



وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cot u$ ، $\operatorname{cosec}\, u$ بدلالة x والتعويض بقيمة كل منهما في (8) ، نجد أن :

$$I=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x+a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2}{\sqrt{x+a}\sqrt{x-a}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{1/2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

194

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{x}{x^2-a^2}dx \qquad .....(1)$$

بضرب دالة التكامل في (1) بسطا ومقاما في 2 نجد ان :

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-a^2} \qquad .....(2)$$

فإذا لاحظنا أن بسط الدالة المتكاملة في (2) هو تفاضلة المقام فإن الدالة المتكاملة تأخذ الصورة $\int \frac{du}{u}$ وحيث أن :

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right|+C \qquad .....(3)$$

من (3) و (1) يثبت صحة المطلوب .

195

$$\int \frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)}dx=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)}dx \qquad .....(1)$$

لإجراء التكامل نحلل الدالة المتكاملة إلى كسورها الجزئية ، ولنفرض كسورها الجزئية على الصورة :

$$\frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-a^2} \qquad .....(2)$$

حيث A,B ثابتان ينبغي تعيين قيمة كل منهما، وبتوحيد مقامات الطرف الأيمن في (2) ، نجد أن :

$$\frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)}=\frac{A\left(x^2-a^2\right)+x\left(Bx+C\right)}{x\left(x^2-a^2\right)} \qquad .....(3)$$

بضرب طرفي (3) في $x\left(x^2-a^2\right)$ لنتخلص من المقامات ، نحصل على :

$$\begin{aligned} 1 &= A\left(x^2-a^2\right)+x\left(Bx+C\right) \\ &= Ax^2-Aa^2+Bx^2+Cx \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (4)$$

والمعادلة (4) هي متطابقة يجب أن تتحقق لجميع قيم x .

ولإيجاد قيمة A نضع x تساوي الصفر في (4) ، لنجد أن :

$$1=-Aa^2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{-1}{a^2} \qquad \ldots\ldots (5)$$

ولإيجاد قيمة B,C نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية غير الصفر ولتكن $x=1$ والتعويض عن $A=\frac{1}{a^2}$ من (5) ، لنجد أن :

$$1=\frac{-1}{a^2}(1)-\left(-\frac{1}{a^2}\right)a^2+B(1)+C(1)$$

$$B+C=\frac{1}{a^2} \qquad \ldots\ldots (6)$$

ثم نضع في (4) ، x تساوي أي قيمة اختيارية اخرى ولتكن $x=-1$ والتعويض عن $A=\frac{-1}{a^2}$ من (5) ، لنجد أن :

$$1=\frac{-1}{a^2}(-1)^2-\left(\frac{-1}{a^2}\right)a^2+B(-1)^2+C(-1)$$

$$B-C=\frac{1}{a^2} \qquad \ldots\ldots (7)$$

بحل المعادلتين (7) ، (6) حلاً آنيا ، نجد أن :

$$B=\frac{1}{a^2} \quad , \quad C=0 \qquad \ldots\ldots (8)$$

بالتعويض بقيم A,B,C من (8) ، (5) على الترتيب في (2) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)} &= \frac{-1}{a^2x}+\frac{x}{a^2\left(x^2-a^2\right)} \\ &= \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{x^2-a^2}-\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (9)$$

بالتعويض عن $\frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)}$ من (9) في (1) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2}\int\left\{\frac{x}{x^2-a^2}-\frac{1}{x}\right\}dx \\ &= \frac{1}{a^2}\left\{\int\frac{x}{x^2-a^2}\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx\right\} \end{aligned} \qquad \ldots (10)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن اثبتناه في العلاقة (194) ، حيث ان :

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2}ln\left|x^2-a^2\right|+C$$

التكامل الثاني بسطه تفاضل مقامه ، حيث ان :

$$\int \frac{1}{u}du=ln\left|u\right|+C$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{2}ln\left|x^2-a^2\right|-ln\left|x\right|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{2}ln\left|x^2-a^2\right|-\frac{1}{2}ln\left|x^2\right|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left\{ln\left|x^2-a^2\right|-ln\left|x^2\right|\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2a^2}ln\left|\frac{x^2-a^2}{x^2}\right|+C \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

196

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C\ \ ;|x|>|a|$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x=a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx=a\sinh u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I=\int \sqrt{a^2\cosh^2 u-a^2}\,(a\sinh u\,du)$$

$$=a^2\int \sqrt{\cosh^2 u-1}\,\sinh u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u-1=\sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I=a^2\int \sqrt{\sinh^2 u}\,\sinh u\,du$$

$$=a^2\int \sinh^2 u\,du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh^2 u = \frac{1}{2}(\cosh 2u - 1) \qquad .....(7)$$

$$I = \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2u - 1)du$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\int \cosh 2u\, du - \int du\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\sinh 2u}{2} - u\right\} + C \qquad .....(8)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u \qquad .....(9)$$

$$I = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{2\sinh u \cosh u}{2} - u\right\} + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\{\sinh u \cosh u - u\} + C \qquad ...(10)$$

ولحساب $\sinh u, \cosh u$ بدلالة x نستخدم (2) والمتطابقة الزائدية (5) كما يلي :

$$\cosh u = \frac{x}{a} \qquad ...(11)$$

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $\sinh u, \cosh u$ من (12) ، (11) على الترتيب في (10) ، نجد أن :

$$I = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} - \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

197

$$\int x\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في 2 ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-a^2}\,(2x\,dx) \quad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات ، معلوم لدينا أن :

$$d\left(x^2\right)= 2x\,dx$$

ولأن طرح كمية ثابتة من دالة لا يغير من تفاضلة الدالة ، فإن :

$$d\left(x^2-a^2\right)= 2x\,dx \quad .....(3)$$

بالتعويض عن $2x\,dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{2}\int \left(x^2-a^2\right)^{1/2} d\left(x^2-a^2\right) \quad .....(4)$$

والتكامل في (4) على الصورة $\int u^n\,du$ وحيث أن :

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \quad n \neq -1$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}+C \quad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{198} \quad \int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\cosh u\,du \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sinh u\,du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) في (1) على الترتيب ، نجد أن :

$$I = \int a^2\cosh^2 u\sqrt{a^2\cosh^2 u-a^2}\,(a\sinh u\,du)$$

$$= a^4\int \cosh^2 u\sqrt{\cosh^2 u-1}\,\sinh u\,du \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = a^4 \int \cosh^2 u \sqrt{\sinh^2 u}\, \sinh u\, du$$

$$= a^4 \int \cosh^2 u \sinh^2 u\, du \qquad .....(6)$$

بضرب دالة التكامل في (6) بسطا ومقاما في 4 ، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{4} \int (2 \sinh u \cosh u)^2 du \qquad .....(7)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية ..

$$2 \sinh u \cosh u = \sinh 2u \qquad .....(8)$$

$$I = \frac{a^4}{4} \int \sinh^2 2u\, du \qquad .....(9)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh^2 \theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1) \qquad ...(10)$$

$$I = \frac{a^4}{8} \int (\cosh 4u - 1) du$$

$$= \frac{a^4}{8} \int \cosh 4u\, du - \frac{a^4}{8} \int du$$

$$= \frac{a^4}{8} \left(\frac{\sinh 4u}{4} \right) - \frac{a^4}{8} u + C \qquad ...(11)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية (8) مرتين على التتابع :

$$I = \frac{a^4}{8} \left\{ \frac{2 \sinh 2u \ \cosh 2u}{4} \right\} - \frac{a^4}{8} u + C$$

$$= \frac{a^4}{8} \left\{ \frac{2 (2 \sinh u \ \cosh u) \cosh 2u}{4} \right\} - \frac{a^4}{8} u + C$$

$$= \frac{a^4}{8} \{ \sinh u \ \cosh u \ \cosh 2u \} - \frac{a^4}{8} u + C \qquad ...(12)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u \qquad ...(13)$$

$$I = \frac{a^4}{8} \{ \sinh u \ \cosh u (\cosh^2 u + \sinh^2 u) \} - \frac{a^4}{8} u + C \qquad ...(14)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب $\sinh u$ ، نجد أن :

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad ...(15)$$

بالتعويض عن $sinh\, u$, $cosh\, u$ من (2) ، (15) على الترتيب في (14) ، نجد ان :

$$I = \frac{a^4}{8}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\frac{x}{a}\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{a^4}{8}cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$=\frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}cosh^{-1}\frac{x}{a}+C \qquad \text{... (16)}$$

من (16) و (1) يثبت صحة المطلوب .

199

$$\int x^n\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}+$$
$$\frac{a^2(n-1)}{(n+2)}\int x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}\,dx \quad ; \quad n \neq -2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x^n\sqrt{x^2-a^2}\,dx \qquad \text{..... (1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x^{n-1} \qquad \text{..... (2)}$$

$$dv = \sqrt{x^2-a^2}\;x\,dx \qquad \text{..... (3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = (n-1)x^{n-2}dx \qquad \text{..... (4)}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$\int dv = \int \sqrt{x^2-a^2}\;x\,dx$$

$$= \int \left(x^2-a^2\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{2}d\left(x^2-a^2\right)\right\}$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2} \qquad \text{..... (5)}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad \text{..... (6)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

وبالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(x^{n-1}\right)\left\{ \frac{1}{3}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} \right\} - \int \frac{1}{3}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}(n-1)\,x^{n-2}dx \qquad .....(8)$$

بضرب طرفي (8) في 3 ، نجد أن :

$$\begin{aligned} 3I &= x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} dx \\ &= x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(x^2 - a^2\right)\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \\ &= x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n-2}\left(x^2\right)\sqrt{x^2 - a^2}\,dx - \\ &\qquad (n-1)\int x^{n-2}\left(-a^2\right)\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \\ &= x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} - (n-1)\int x^{n}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx + \\ &\qquad (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \qquad .....(9) \end{aligned}$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأول في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$3I = x^{n+1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} - (n-1)I + (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

$$3I + (n-1)I = x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} + (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \qquad ...(10)$$

بقسمة طرفي (10) على $(n+2)$ ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(x^2 - a^2\right)^{3/2} + \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

200

$$\int \left(x^2 - a^2\right)^{3/2}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2 - 5a^2\right)\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \left(x^2 - a^2\right)^{3/2} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \left(a^2\cosh^2 u - a^2\right)^{3/2} (a\sinh u\, du)$$

$$= a^4 \int \left(\cosh^2 u - 1\right)^{3/2} \sinh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = a^4 \int \sinh^4 u\, du \qquad .....(6)$$

وللتعبير عن $\sinh^4 u$ في صورة مضاعفات u نستخدم المتطابقة الزائدية التالية :

$$\sinh^2\theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1)$$

$$\sinh^4 u = \left(\sinh^2 u\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\cosh 2u - 1)\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cosh^2 2u - 2\cosh 2u + 1\right)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2\theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta + 1)$$

$$\sinh^4 u = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}(\cosh 4u + 1) - 2\cosh 2u + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\cosh 4u + 1 - 4\cosh 2u + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\cosh 4u - 4\cosh 2u + 3\right\} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\sinh^4 u$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I = \frac{a^4}{8}\int \left\{\cosh 4u - 4\cosh 2u + 3\right\} du$$

$$= \frac{a^4}{8}\left\{\frac{\sinh 4u}{4} - 4\frac{\sinh 2u}{2} + 3u\right\} + C \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta \qquad .....(9)$$

$$I=\frac{a^4}{8}\left\{\frac{2\sinh 2u\cosh 2u}{4}-4\frac{2\sinh u\cosh u}{2}+3u\right\}+C \qquad ...(10)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (9) والمتطابقة الزائدية :

$$\cosh 2\theta=2\cosh^2\theta-1 \qquad ...(11)$$

$$I=\frac{a^4}{8}\left\{\frac{2\left(2\sinh u\ \cosh u\right)\left(2\cosh^2 u-1\right)}{4}-4\sinh u\ \cosh u+3u\right\}+C$$

$$=\frac{a^4}{8}\left\{\sinh u\ \cosh u\left(2\cosh^2 u-5\right)+3u\right\}+C \qquad ...(12)$$

ولحساب $\sinh u$ نستخدم (2) والمتطابقة الزائدية (5) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}\sinh u&=\sqrt{\cosh^2 u-1}\\&=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\\&=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\end{aligned} \qquad ...(13)$$

بالتعويض عن $u\ ,\cosh u\ ,\sinh u$ من (5) ، (2) على الترتيب في (12) نجد ان :

$$I=\frac{a^4}{8}\left\{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\,\frac{x}{a}\left(2\frac{x^2}{a^2}-5\right)+3\cosh^{-1}\frac{x}{a}\right\}+C \qquad ...(14)$$

وباستخدام تعريف $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$ في الصورة اللوغاريتمية حيث أن :

$$\cosh^{-1}\frac{x}{a}=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|$$

$$I=\frac{x}{8}\left(2x^2-5a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|+C$$

$$=\frac{x}{8}\left(2x^2-5a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C' \qquad ...(15)$$

حيث $C'=C-\frac{3a^4}{8}\ln|a|$

من (15) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{201}\quad \int x\left(x^2-a^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{5}\left(x^2-a^2\right)^{5/2}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x\left(x^2-a^2\right)^{3/2}dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في 2 ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2}\int \left(x^2-a^2\right)^{3/2}(2x\,dx) \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات ، معلوم لدينا أن :

$$d\left(x^2\right)=2x\,dx$$

ولأن طرح كمية ثابتة من دالة لا يغير من تفاضلة الدالة ، فإن :

$$d\left(x^2-a^2\right)=2x\,dx \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $2x\,dx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2}\int \left(x^2-a^2\right)^{3/2}d\left(x^2-a^2\right) \qquad .....(4)$$

والتكامل في (4) على الصورة $\int u^n\,du$ وحيث أن :

$$\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\ ;\ n\neq -1$$

$$I=\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-a^2\right)^{5/2}+C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{202}\quad \int \frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{x}dx=\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}-a^2\sqrt{x^2-a^2}+a^3\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{x}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sec u \qquad ; u \in \left(-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) ; x \in (-\infty ; -a) \cup (a ; +\infty) \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec u \ \tan u \, du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\left(a^2 \sec^2 u - a^2\right)^{3/2}}{a \sec u} a \sec u \ \tan u \ du$$

$$= a^3 \int \left(\sec^2 u - 1\right)^{3/2} \tan u \ du \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad .....(5)$$

$$I = a^3 \int \left(\tan^2 u\right)^{3/2} \tan u \ du$$

$$= a^3 \int \tan^4 u \, du$$

$$= a^3 \int \tan^2 u \cdot \tan^2 u \ du \quad .....(6)$$

$$= a^3 \int \left(\sec^2 u - 1\right) \tan^2 u \, du$$

$$= a^3 \int \left(\tan^2 u \ \sec^2 u - \tan^2 u\right) du$$

$$= a^3 \int \tan^2 u \ \sec^2 u \, du - a^3 \int \tan^2 u \ du$$

$$= a^3 \int \tan^2 u \ \sec^2 u \ du - a^3 \int \left(\sec^2 u - 1\right) du$$

$$= a^3 \int \tan^2 u \ \sec^2 u \, du - a^3 \int \sec^2 u \, du - a^3 \int du \quad .....(7)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$\sec^2 u \, du = d\left(\tan u\right) \quad .....(8)$$

وباستخدام (8) في (7) ، نجد أن :

$$I = a^3 \int \tan^2 u \, d\left(\tan u\right) - a^3 \int d\left(\tan u\right) - a^3 \int du$$

$$= a^3 \left(\frac{\tan^3 u}{3}\right) - a^3 \tan u - a^3 u + C \quad .....(9)$$

ولحساب $\tan u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية (5) ، نجد أن :

$$\tan u = \sqrt{\sec^2 u - 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \quad ...(10)$$

ومن (2) يمكن إيجاد u على الصورة :

$$u = sec^{-1}\frac{x}{a} \quad ...(11)$$

بالتعويض عن $tan\ u,\ u$ من (11) ، (10) على الترتيب في (9) ، نجد ان :

$$I = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)^3 - a^3\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + a^3 sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{3/2} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3 sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C \quad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

203

$$\int x^n\left(x^2-a^2\right)^{3/2}dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(x^2-a^2\right)^{3/2} - \frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{x^2-a^2}\,dx \quad ;\ n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = x^n\left(x^2-a^2\right)^{3/2}dx \quad ....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = \left(x^2-a^2\right)^{3/2} \quad .....(2)$$

$$dv = x^n\ dx \quad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{3}{2}\left(x^2-a^2\right)^{1/2}(2x\,dx)$$

$$= 3x\sqrt{x^2-a^2}\ dx \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int x^n\ dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad .....(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن v , du , u من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(x^2-a^2\right)^{3/2}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(3x\sqrt{x^2-a^2}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(x^2-a^2\right)^{3/2}-\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{x^2-a^2}\,dx \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

204

$$\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx=\frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1}-\frac{na^2}{n+1}\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx \quad ; \; n\neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n \qquad .....(2)$$

$$dv=dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=nx\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v=x \qquad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I=\int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}(x)-\int x\left\{nx\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx\right\}$$

$$=x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}-n\int x^2\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx$$

$$=x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}-n\,I_1 \qquad .....(8)$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int x^2 \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx \qquad .....(9)$$

$$= \int \left\{ \left(x^2-a^2\right)+a^2 \right\} \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= \int \left(x^2-a^2\right) \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx + a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2} \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx + a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n} dx + a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(10)$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن في *(10)* هو التكامل في *(1)* ، ولذا :

$$I_1 = I + a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن I_1 من *(11)* في *(8)* ، نجد أن :

$$I = x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} - n\left\{ I + a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx \right\}$$

$$= x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} - n\,I - n\,a^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx$$

$$I\,(n+1) = x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} - na^2 \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx$$

$$I = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}}{n+1} - \frac{na^2}{n+1} \int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx \qquad ...(12)$$

من *(12)* و *(1)* يثبت صحة المطلوب .

205

$$\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n} dx = \frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C \quad ; \quad n \neq -2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n} dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في $2\sqrt{x^2-a^2}$ ، نجد أن :

$$I=\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n\cdot\frac{2\sqrt{x^2-a^2}}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$=\int\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+1}\left\{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\right\} \qquad .....(2)$$

فإذا لاحظنا في (2) أن الدالة المتكاملة على الصورة :

$$\int u(x)\cdot u'(x)dx$$

حيث $u'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $u(x)$.
وباستخدام صيغة التكامل :

$$\int[u(x)]^n u'(x)dx=\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \ n\neq -1$$

$$I=\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{(n+1)+1}}{(n+1)+1}+C$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C \qquad .....(3)$$

من (3) و (1) يثبت صحة المطلوب .

206

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C \quad ; \ |x|>|a|$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\sinh u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\cosh^2u-a^2}}(a\sinh u\,du)$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{\cosh^2u-1}}\sinh u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1 \quad .....(5)$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u}} \sinh u \, du$$

$$= \int du$$

$$= u + C \quad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) ، نجد ان :

$$I = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad .....(7)$$

من تعريف دالة جيب التمام الزائدية العكسية ، نجد ان :

$$\cosh^{-1}\theta = \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right)$$

$$I = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a + C$$

فإذا لاحظنا ان $0 < \left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ وذلك لجميع قيم x فإن :

$$I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \quad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

207

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n} dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n-2}}$$

$; n \neq 2$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n} dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \cosh u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \sinh u \; du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2}\right)^n} (a \sinh u \, du)$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\cosh^2 u - 1}\right)^n} (\sinh u \, du) \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\sinh^2 u}\right)^n} (\sinh u \, du)$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\sinh^{n-1} u} du$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}} \int \operatorname{cosech}^{n-1} u \, du \qquad .....(6)$$

ولحساب I في (6) نستخدم العلاقة (30) ، فنجد ان :

$$I = \frac{1}{a^{n-1}} \left\{ \frac{-\operatorname{cosech}^{n-3} u \; \coth u}{n-2} - \frac{n-3}{n-2} \int \operatorname{cosech}^{n-3} u \, du \right\} \qquad .....(7)$$

ولحساب قيمة $\coth u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad .....(8)$$

ولحساب قيمة $\operatorname{cosech} u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\operatorname{cosech} u = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\coth u$, $\operatorname{cosech} u$ من (9) ، (8) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{a^{n-1}}\left\{\frac{\frac{a^{n-3}}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{2-n}-\frac{n-3}{n-2}\int\frac{a^{n-3}}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-3}}\cdot\frac{dx}{\frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{a}}\right\}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2}-\frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{1}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}}dx \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

208	$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\sqrt{x^2-a^2}+C$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \qquad .....(1)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (1) بسطا ومقاما في 2 ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad .....(2)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(x^2\right)=2x\,dx$$

ولأن طرح كمية ثابتة من دالة لا يُغير من تفاضلة الدالة ، فإن :

$$d\left(x^2-a^2\right)=2x\,dx \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن $2xdx$ من (3) في (2) ، نجد أن :

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-a^2\right)}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad .....(4)$$

والتكامل في (4) على الصورة : $\int\frac{du}{\sqrt{u}}$ وحيث أن :

$$\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+C$$

$$I = \frac{1}{2}\left\{2\sqrt{x^2-a^2}\right\}+C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2}+C \qquad .....(5)$$

من (5) و (1) يثبت صحة المطلوب .

209	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}sec^{-1}\left\|\frac{x}{a}\right\|+C$	(i)
	$= \frac{1}{a}cos^{-1}\left\|\frac{a}{x}\right\|+C$	(ii)

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان ؛

$$x = a\sec u \qquad ; u \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right) ; x \in (-\infty;-a) \cup (a;+\infty) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان ؛

$$dx = a\sec u \tan u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان ؛

$$I = \int \frac{1}{a\sec u\sqrt{a^2\sec^2 u - a^2}}(a\sec u \tan u\, du)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 u - 1}}\tan u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية ؛

$$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u}}\tan u\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int du$$

$$= \frac{1}{a}u + C \qquad .....(6)$$

باستخدام (2) لحساب قيمة u بدلالة x ، والتعويض في (6) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a} sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + C \quad .....(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة العلاقة (i).

وباستخدام العلاقة : $cos^{-1} \theta = sec^{-1} \frac{1}{\theta}$

$$I = \frac{1}{a} cos^{-1} \left| \frac{a}{x} \right| + C \quad .....(8)$$

ومن (8) و (1) يثبت صحة العلاقة (ii).

210

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{a^2}{2} cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a \cosh u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a \sinh u \, du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a^2 \cosh^2 u}{\sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2}} (a \sinh u \, du)$$

$$= a^2 \int \frac{\cosh^2 u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}} (\sinh u \, du) \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \quad .....(5)$$

$$I = a^2 \int \frac{\cosh^2 u}{\sqrt{\sinh^2 u}} \sinh u \, du$$

$$= a^2 \int \cosh^2 u \, du \quad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = \frac{1}{2}\left(\cosh 2u + 1\right) \qquad .....(7)$$

$$I = a^2 \int \frac{1}{2}\left(\cosh 2u + 1\right)du$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int \cosh 2u \, du + \frac{1}{2}a^2 \int du$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sinh 2u}{2}\right) + \frac{1}{2}a^2 u + C \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u \qquad .....(9)$$

$$I = \frac{1}{2}a^2 \sinh u \cosh u + \frac{1}{2}a^2 u + C \qquad ...(10)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب قيمة $\sinh u$ بدلالة x ، نجد ان :

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

وبالتعويض عن قيمة $\cosh u$ من (2) ، نجد ان :

$$\sinh u = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad ...(11)$$

ومن (2) يمكن إيجاد u في الصورة :

$$u = \cosh^{-1}\frac{x}{a} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $\cosh u$, $\sinh u$, u من (12) ، (11) ، (2) على الترتيب في (10) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{2}a^2 \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2}a^2 \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

211

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C \qquad ;a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2\cosh^2 u\sqrt{a^2\cosh^2 u-a^2}}(a\sinh u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2 u\sqrt{\cosh^2 u-1}}\sinh u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u-1=\sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2 u\sqrt{\sinh^2 u}}\sinh u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2 u}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \operatorname{sech}^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2}\tanh u + C \qquad .....(6)$$

ولحساب $\tanh u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\tanh u = \frac{\sqrt{\cosh^2 u-1}}{\cosh u}$$

وبالتعويض عن قيمة $\cosh u$ من (2) ، نجد أن :

$$\tanh u = \frac{\sqrt{(x/a)^2-1}}{(x/a)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} \qquad .....(7)$$

$$I=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

212

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\sinh u\ du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sqrt{a^2\cosh^2 u-a^2}}{a\cosh u}(a\sinh u\ du)\\&=a\int\frac{\sqrt{\cosh^2 u-1}}{\cosh u}\sinh u\ du \qquad .....(4)\end{aligned}$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u-1=\sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$\begin{aligned}I&=a\int\frac{\sqrt{\sinh^2 u}}{\cosh u}\sinh u\ du\\&=a\int\frac{\sinh^2 u}{\cosh u}du\\&=a\int\frac{\cosh^2 u-1}{\cosh u}du\\&=a\int\left\{\cosh u-\frac{1}{\cosh u}\right\}du\\&=a\int\{\cosh u-\text{sech}\,u\}du\\&=a\int\cosh u\,du-a\int\text{sech}\,u\,du\\&=a\sinh u-a\tan^{-1}(\sinh u)+C \qquad .....(6)\end{aligned}$$

لاحظ أننا استخدمنا العلاقة (89) لحساب التكامل الأيمن في الطرف الأيسر.

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) لحساب $\sinh u$ بدلالة x ، نجد أن :

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

وبالتعويض عن قيمة $\cosh u$ من (2) ، نجد أن :

$$\sinh u = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad \text{.....(7)}$$

بالتعويض عن قيمة $\sinh u$ من (7) في (6) ، نجد أن :

$$I = a \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - a \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C \qquad \text{.....(8)}$$

والآن يجب إثبات أن :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$$

لنفترض أن :

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$\therefore \quad \tan y = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad \text{.....(9)}$$

وباستخدام (9) في المثلث القائم الزاوية المجاور لحساب قيمة $\cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$ نجد أن :



$$\cos y = \frac{a}{x}$$

$$\therefore \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) \qquad \text{...(10)}$$

من (10) ، (9) نستنتج أن :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) \qquad \text{...(11)}$$

وباستخدام (11) في (8) ، نجد أن :

$$I = \sqrt{x^2-a^2} - a\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C \qquad ....(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

213

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sec u \qquad ;u \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right); x \in (-\infty;-a) \cup (a;+\infty) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\sec u \tan u \, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx من (3) ، (2) في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2\sec^2 u - a^2}}{a^2\sec^2 u}(a\sec u \tan u \, du)$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sec^2 u - 1}}{\sec^3 u}\sec u \tan u \, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u \qquad ;u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \int \frac{\tan^2 u}{\sec u}du$$

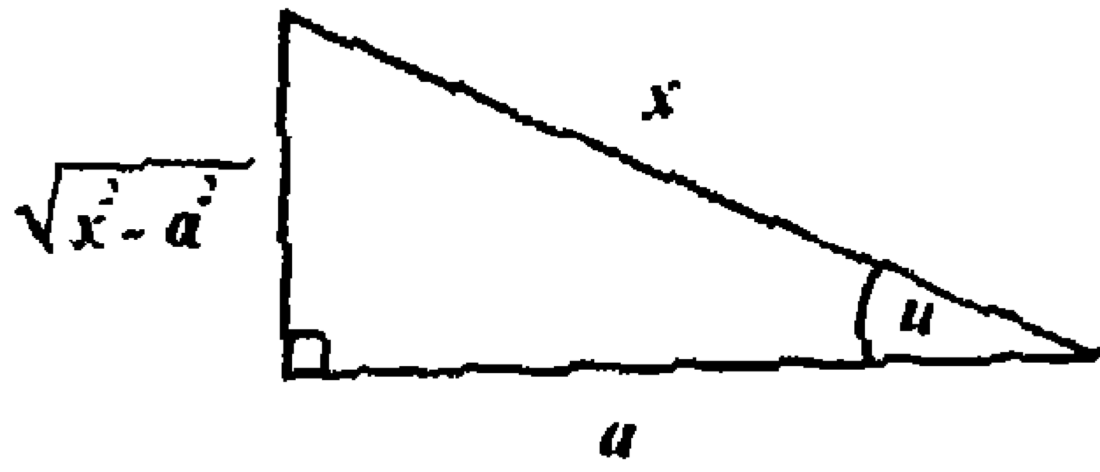
$$= \int \frac{\sec^2 u - 1}{\sec u}du$$

$$= \int \left(\sec u - \frac{1}{\sec u}\right)du$$

$$= \int \sec u \, du - \int \cos u \, du$$

$$= \ln|\sec u + \tan u| - \sin u + C \qquad .....(6)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $sin\, u$ ، $tan\, u$ ، نجد ان :



$$tan\, u = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad .....(7)$$

$$sin\, u = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \qquad .....(8)$$

بالتعويض عن قيمة $sec\, u$, $tan\, u$, $sin\, u$ من (8) ، (7) ، (2) على الترتيب في (6) ، نجد ان :

$$I = ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$$

$$= ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{(x/a)^2 - 1}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C \qquad .....(9)$$

ومن تعريف دالة جيب التمام الزائدية العكسية ، نجد أن :

$$cosh^{-1}(x/a) = ln\left|(x/a) + \sqrt{(x/a)^2 - 1}\right|$$

$$\therefore\ I = cosh^{-1}(x/a) - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

214

$$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}}\, dx = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}}\, dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\, sec\, u \qquad ; u \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right); x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\, sec\, u\, tan\, u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2 \sec^2 u - a^2\right)^{3/2}} \left(a \sec u \tan u \, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\sec^2 u - 1\right)} \sec u \tan u \, du \qquad .....(4)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\tan^2 u\right)^{3/2}} \sec u \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\tan^2 u} \sec u \, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \qquad .....(6)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\left(\sin u\right) = \cos u \, du$$

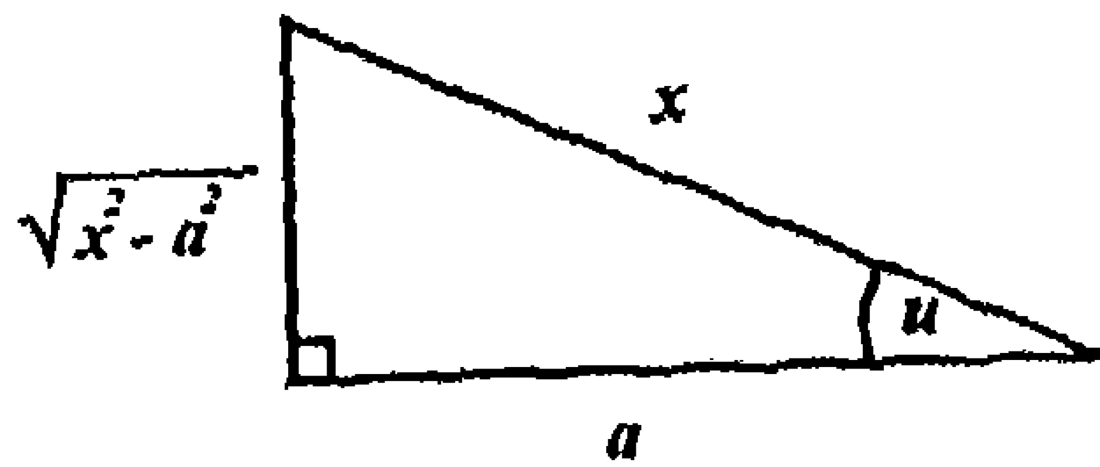
$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{d\left(\sin u\right)}{\sin^2 u} \qquad .....(7)$$

والدالة المتكاملة في (7) على الصورة $\int z^n \, dz$ حيث $n = -2$ وحيث ان :

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \qquad ; \quad n \neq -1$$

$$\therefore I = \frac{-1}{a^2}\left(\frac{1}{\sin u}\right) + C \qquad .....(8)$$

باستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور لحساب قيمة $\sin u$ بدلالة x والتعويض في (8) ، نجد ان :



$$I = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$215 \qquad \int \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx \qquad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \qquad \text{.....(2)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \qquad \text{.....(3)}$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a\cosh u}{\left(a^2\cosh^2 u - a^2\right)^{3/2}}\left(a\sinh u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh u \sinh u}{\left(\cosh^2 u - 1\right)^{3/2}}du \qquad \text{.....(4)}$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad \text{.....(5)}$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\cosh u \sinh u}{\left(\sinh^2 u\right)^{3/2}}du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh u}{\sinh^2 u}du \qquad \text{.....(6)}$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\left(\sinh u\right) = \cosh u\, du$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\sinh u\right)}{\sinh^2 u} \qquad \text{.....(7)}$$

والتكامل في (7) على الصورة $\int z^n dz$ حيث $n=-2$ ، وحيث ان :

$$\int z^n du = \frac{z^{n+1}}{n+1}+C \quad ; \; n \neq -1$$

$$I = -\frac{1}{a}\frac{1}{\sinh u}+C \qquad \text{.....(8)}$$

ولحساب قيمة $\sinh u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة الزائدية (5) ، نجد ان :

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\sinh u$ من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}} + C$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\langle 216 \rangle \qquad \int \frac{1}{x\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}} dx = -\frac{1}{a^2}\left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| \right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \sec u \qquad ; u \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right); x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a \sec u \tan u \, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a \sec u \left(a^2 \sec^2 u - a^2\right)^{3/2}} (a \sec u \tan u \, du)$$
$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{\left(\sec^2 u - 1\right)^{3/2}} \tan u \, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(\tan^2 u\right)^{3/2}} \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\tan^2 u} du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \cot^2 u \, du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) نستخدم العلاقة (23) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^3}\left\{-\cot u - u\right\} + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\cot u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة المثلثية (5) على الصورة التالية :

$$\cot u = \frac{1}{\tan u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 u - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad .....(8)$$

ومن (2) ، نجد أن :

$$u = \sec^{-1}\frac{x}{a}$$

$$= \cos^{-1}\frac{a}{x} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cot u, u$ من (9) ، (8) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^3}\left\{-\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|\right\} + C$$

$$= -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|\right\} + C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

لاحظ أن :

أحيانا ما يكتب هذا القانون على الصورة :

$$\int \frac{1}{x\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}} dx = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx\right\}$$

وبالرجوع إلى العلاقة (209) ، نجد ان :

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$$

وايضا قد تجد هذا القانون في مراجع اخرى على الصورة :

$$\int \frac{1}{x\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right\} + C$$

وبالرجوع إلى القاعدة (212) ، تجد إثباتا بصحة ان :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$$

217

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \qquad \text{.....}(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a^2\cosh^2 u}{\left(a^2\cosh^2 u - a^2\right)^{3/2}}\left(a\sinh u\, du\right)$$

$$= \int \frac{\cosh^2 u}{\left(\cosh^2 u - 1\right)^{3/2}}\sinh u\, du \qquad \text{.....}(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad \text{.....}(5)$$

$$I = \int \frac{\cosh^2 u}{\left(\sinh^2 u\right)^{3/2}}\left(\sinh u\, du\right)$$

$$= \int \frac{\cosh^2 u}{\sinh^2 u}du$$

$$= \int \coth^2 u\, du \qquad \text{.....}(6)$$

ولحساب I في (6) نستخدم القاعدة (87) ، نجد ان :

$$I = u - \coth u + C \qquad \text{..... (7)}$$

ولحساب $\coth u$ في (7) ، نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}$$

$$= \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{x^2 - a^2}/a}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \text{..... (8)}$$

بالتعويض عن $\coth u$ من (8) في (7) ، نجد ان :

$$I = \cosh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C \qquad \text{..... (9)}$$

ومن تعريف دالة جيب التمام الزائدية العكسية ، نجد ان :

$$\cosh^{-1}\frac{x}{a} = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right|$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln|a| \qquad \text{... (10)}$$

بالتعويض عن $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$ من (10) في (9) ، نجد ان :

$$I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln|a| - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \qquad \text{... (11)}$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{218}\quad \int \frac{1}{x^2\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx=-\frac{1}{a^4}\left\{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right\}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{x^2\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\sinh u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن dx , x من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int \frac{1}{a^2\cosh^2 u\left(a^2\cosh^2 u-a^2\right)^{3/2}}\left(a\sinh u\,du\right)$$

$$=\frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\cosh^2 u\left(\cosh^2 u-1\right)^{3/2}}\sinh u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u-1=\sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\cosh^2 u\left(\sinh^2 u\right)^{3/2}}\left(\sinh u\,du\right)$$

$$=\frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\sinh^2 u\cosh^2 u}du \qquad .....(6)$$

بضرب الدالة المتكاملة في (6) بسطا ومقاما في (4) ، نجد أن :

$$I=\frac{4}{a^4}\int \frac{1}{\left(2\sinh u\cosh u\right)^2}du \qquad .....(7)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$2\sinh u\cosh u=\sinh 2u \qquad .....(8)$$

$$I=\frac{4}{a^4}\int \frac{1}{\sinh^2 2u}du$$

$$=\frac{4}{a^4}\int \operatorname{cosech}^2 2u\,du \qquad .....(9)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d\left(\coth 2u\right)=-2\operatorname{cosech}^2 2u\,du$$

$$\therefore\ cosech^2 2u\, du = -\frac{1}{2} d\left(\coth 2u\right) \qquad ...(10)$$

وباستخدام (10) في (9) ، نجد أن :

$$I = \frac{4}{a^4}\left\{\int -\frac{1}{2} d\left(\coth 2u\right)\right\}$$

$$= -\frac{2}{a^4}\coth 2u + C \qquad ...(11)$$

ولحساب $\coth 2u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة الزائدية ،

$$\coth 2u = \frac{\cosh 2u}{\sinh 2u}$$

$$= \frac{\cosh^2 u + \sinh^2 u}{2\sinh u \cosh u}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cosh u}{\sinh u} + \frac{\sinh u}{\cosh u}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\coth u + \tanh u\right\}$$

ولحساب $\tanh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$$

$$= \frac{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}{\cosh u}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2/a^2 - 1}}{(x/a)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \qquad ...(12)$$

$$\coth u = \frac{1}{\tanh u}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad ...(13)$$

$$\therefore\ \coth 2u = \frac{1}{2}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\right\} \qquad ...(14)$$

بالتعويض عن $coth\,2u$ من (14) في (11) ، نجد ان :

$$I = -\frac{2}{a^4}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right]\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right\}+C \quad ...(15)$$

من (15) و (1) يثبت صحة المطلوب .

219 $$\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{5/2}}dx = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{(x^2-a^2)^{3/2}}\right\}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{(x^2-a^2)^{5/2}}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \quad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \quad .....(3)$$

بالتعويض عن x , dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{(a^2\cosh^2 u - a^2)^{5/2}}(a\sinh u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{(\cosh^2 u - 1)^{5/2}}(\sinh u\, du) \quad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \quad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{(\sinh^2 u)^{5/2}}\sinh u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\sinh^4 u}du \quad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\frac{1}{\sinh u} = cosech\, u \quad .....(7)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int cosech^4 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\left(cosech^2 u \cdot cosech^2 u\, du\right) \qquad .....(8)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d\,(coth\,u) = -cosech^2 u\, du \qquad .....(9)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$cosech^2 u = coth^2 u - 1 \qquad ...(10)$$

$$I = -\frac{1}{a^4}\int \left(coth^2 u - 1\right) d\,(coth\,u)$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\int d\,(coth\,u) - \int coth^2 u\, d\,(coth\,u)\right\}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{coth\,u - \frac{1}{3}coth^3 u\right\} + C \qquad ...(11)$$

ولحساب $coth\,u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة :

$$coth\,u = \frac{cosh\,u}{\sqrt{cosh^2 u - 1}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن $coth\,u$ من (12) في (11) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}}\right\} + C \qquad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

220

$$\int \frac{x}{\left(x^2 - a^2\right)^{5/2}}dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{\left(x^2 - a^2\right)^{5/2}} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\,cosh\,u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a \sinh u \, du \qquad \text{..... (3)}$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a \cosh u}{\left(a^2 \cosh^2 u - a^2\right)^{5/2}} \left(a \sinh u \, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{\cosh u \sinh u}{\left(\cosh^2 u - 1\right)^{5/2}} du \qquad \text{..... (4)}$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad \text{..... (5)}$$

$$I = \frac{1}{a^3} \int \frac{\cosh u \sinh u}{\left(\sinh^2 u\right)^{5/2}} du$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{\cosh u}{\sinh^4 u} du$$

$$= \frac{1}{a^3} \int \frac{d\left(\sinh u\right)}{\sinh^4 u} \qquad \text{..... (6)}$$

والتكامل في (6) على الصورة $\int z^n dz$ وحيث ان:

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \qquad ; n \neq -1$$

$$\therefore I = -\frac{1}{3a^3} \frac{1}{\sinh^3 u} + C \qquad \text{..... (7)}$$

ولحساب قيمة $\sinh u$ بدلالة x ، نستخدم المتطابقة الزائدية (5) .

$$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad \text{..... (8)}$$

وبالتعويض عن قيمة $\sinh u$ من (8) في (7)، نجد أن:

$$I = -\frac{1}{3a^3} \left\{ 1 \Big/ \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \right\} + C$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1}{\left(x^2 - a^2\right)^{3/2}} + C \qquad \text{..... (9)}$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\text{221} \qquad \int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}dx = -\frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I ستستخدم طريقة التكامل بالتعويض، ولنفترض ان :

$$x = a\cosh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\sinh u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a^2\cosh^2 u}{\left(a^2\cosh^2 u - a^2\right)^{5/2}}(a\sinh u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cosh^2 u}{\left(\cosh^2 u - 1\right)^{5/2}}(\sinh u\, du) \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية:

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cosh^2 u}{\left(\sinh^2 u\right)^{5/2}}\sinh u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\cosh^2 u}{\sinh^4 u}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sinh^2 u}\cdot\frac{\cosh^2 u}{\sinh^2 u}du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقتين الزائديتين :

$$\frac{1}{\sinh u} = \operatorname{cosech} u \quad ; \quad \frac{\cosh u}{\sinh u} = \coth u$$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \operatorname{cosech}^2 u \coth^2 u\, du \qquad .....(7)$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$d(\coth u) = -\operatorname{cosech}^2 u\, du \qquad .....(8)$$

$$\therefore I = -\frac{1}{a^2}\int \coth^2 u\, d(\coth u) \qquad .....(9)$$

والتكامل في (9) على الصورة $\int z^n dz$ وحيث ان :

$$\int z^n \, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$$

$$I = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\coth^3 u}{3}\right\} + C$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\coth^3 u + C \qquad \ldots(10)$$

ولحساب $\coth u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\coth u = \frac{\cosh u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}$$

وبالتعويض من (2) عن $\cosh u = \frac{x}{a}$ ، نجد ان :

$$\coth u = \frac{(x/a)}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \ldots(11)$$

بالتعويض عن $\coth u$ من (11) في (10) ، نجد ان :

$$I = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{(x^2 - a^2)^{3/2}} + C \qquad \ldots(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب.

222

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad ; a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx \qquad \ldots..(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \tanh u \qquad \ldots..(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \, \text{sech}^2 u \, du \qquad \ldots..(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2 - a^2\tanh^2 u}\left(a\,sech^2 u\ du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1-\tanh^2 u}\left(sech^2 u\ du\right) \qquad .....(4)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية ،

$$1-\tanh^2 u = sech^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{sech^2 u}\left(sech^2 u\ du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int du$$

$$= \frac{1}{a}u + C \qquad .....(6)$$

بالتعويض عن قيمة u من (2) في (6) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad .....(7)$$

من تعريف دالة الظل الزائدي العكسية ، نجد أن :

$$\tanh^{-1}\theta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\theta}{1-\theta} \quad ; \ |\theta| < 1$$

$$I = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+(x/a)}{1-(x/a)}\right|\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad .....(8)$$

وحيث أن $|a-x| = |x-a|$ فإن (8) تأخذ الصورة :

$$I = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

223

$$\int \frac{x}{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|a^2-x^2\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{a^2-x^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a\sin u}{a^2 - a^2\sin^2 u} a\cos u\, du$$

$$= \int \frac{\sin u}{1-\sin^2 u}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \int \frac{\sin u}{\cos^2 u}\cos u\, du$$

$$= \int \frac{\sin u}{\cos u}du \qquad .....(6)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\cos u) = -\sin u\, du$$

$$\therefore\ \sin u\, du = -d(\cos u) \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\sin u\, du$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u}$$

$$= -\ln|\cos u| + C \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (5) لحساب $\cos u$ ، نجد ان :

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} \qquad .....(9)$$

$$= \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن $\cos u$ من (10) في (8) ، نجد ان :

$$I = -\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)^{1/2}\right| + C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a^2-x^2}{a^2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|a^2-x^2\right|+\frac{1}{2}\ln a^2+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|a^2-x^2\right|+C$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\langle 224 \rangle \qquad \int\frac{1}{x\left(a^2-x^2\right)}dx=\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|+C \qquad ;a\neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int\frac{1}{x\left(a^2-x^2\right)}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x=a\sin u \qquad ;u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ x\in(-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx=a\cos u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I=\int\frac{1}{a\sin u\left(a^2-a^2\sin^2 u\right)}(a\cos u\,du)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin u\left(1-\sin^2 u\right)}(\cos u\,du) \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u=\cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin u\cos^2 u}\cos u\,du$$

وبضرب دالة التكامل بسطا ومقاما في 2، نجد أن:

$$=\frac{2}{a^2}\int\frac{1}{2\sin u\cos u}du$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ، نحصل على:

$$=\frac{2}{a^2}\int\frac{1}{\sin 2u}du$$

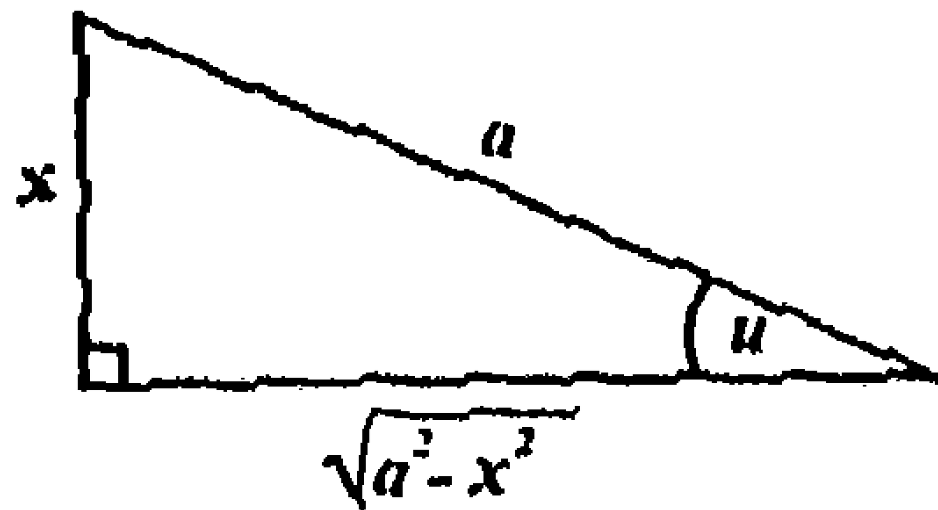
$$=\frac{2}{a^2}\int\operatorname{cosec} 2u\,du \qquad .....(6)$$

ولحساب I في (6) نستخدم العلاقة (28) الحالة (ii) ، نجد ان :

$$I = \frac{2}{a^2}\left\{\frac{1}{2}\ln|\tan u|\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a^2}\ln|\tan u|+C \qquad .....(7)$$

وباستخدام المثلث القائم الزاوية المجاور لحساب $\tan u$ باستخدام (2) ، ثم التعويض في (7) ، نجد أن :



$$I = \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$$

$$= \frac{1}{a^2}\ln\left|\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{1/2}\right|+C$$

$$= \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|+C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

{225} $$\int \frac{1}{(a^2-x^2)^2}\,dx = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)}+\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C \qquad ; a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{(a^2-x^2)^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\tanh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\,\mathrm{sech}^2 u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن dx , x من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2 - a^2 \tanh^2 u\right)^2}\left(a\,\text{sech}^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(1 - \tanh^2 u\right)^2}\left(\text{sech}^2 u\, du\right) \qquad .....(4)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1 - \tanh^2 u = \text{sech}^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\left(\text{sech}^2 u\right)^2}\,\text{sech}^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\text{sech}^2 u}\, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \cosh^2 u\, du \qquad .....(6)$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$\cosh^2 u = \frac{1}{2}\left(1 + \cosh 2u\right) \qquad .....(7)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{2}\left(1 + \cosh 2u\right)du$$

$$= \frac{1}{2a^3}\int du + \frac{1}{2a^3}\int \cosh 2u\, du$$

$$= \frac{1}{2a^3}u + \frac{1}{2a^3}\left\{\frac{\sinh 2u}{2}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}u + \frac{1}{2a^3}\sinh u \cosh u + C \qquad .....(8)$$

ولحساب $\sinh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\sinh u = \frac{\tanh u}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad .....(9)$$

ولحساب $\cosh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن $u, \sinh u , \cosh u$ من (10) ، (9) ، (2) على الترتيب في (8) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{2a^3}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2a^3}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)} + C \qquad ...(11)$$

ومن تعريف دالة الظل الزائدي العكسية ، نجد أن :

$$\tanh^{-1}\theta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\theta}{1-\theta} \quad ; \ |\theta| < 1$$

$$I = \frac{1}{2a^3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+(x/a)}{1-(x/a)}\right| + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)} + C$$

وحيث أن : $|x-a| = |a-x|$

$$I = \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)} + C \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

226

$$\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx = \frac{x}{2a^2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2a^2(n-1)}\int\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx \quad ; \ n \neq 1, a \neq 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx \qquad .....(1)$$

لنعبر عن بسط الدالة المتكاملة في (1) في الصورة التالية :

$$1 = \frac{1}{a^2}\left(a^2 - x^2 + x^2\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2-x^2\right)+x^2}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\left\{\frac{a^2-x^2}{\left(a^2-x^2\right)^n} + \frac{x^2}{\left(a^2-x^2\right)^n}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx+\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx+\frac{1}{a^2}I_1 \qquad .....(2)$$

حيث افترضنا ان :

$$I_1=\int\frac{x^2}{\left(a^2-x^2\right)^n}dx \qquad .....(3)$$

ولحساب I_1 في (3) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=x \qquad .....(4)$$

$$dv=\frac{xdx}{\left(a^2-x^2\right)^n} \qquad .....(5)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (4) ، نجد ان :

$$du=dx \qquad .....(6)$$

وبتكامل الطرفين في (5) ، نجد ان :

$$\int dv=\int\frac{xdx}{\left(a^2-x^2\right)^n}$$

$$=\frac{-1}{2}\int\frac{d\left(-x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^n}$$

$$=\frac{-1}{2}\int\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^n} \qquad .....(7)$$

والتكامل في (7) على الصورة $\int u^n du$

$$v=-\frac{1}{2}\frac{\left(a^2-x^2\right)^{-n+1}}{-n+1}$$

$$=\frac{1}{2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}} \qquad .....(8)$$

باستخدام (5) ، (4) في (3) نجد ان I_1 تأخذ الصورة :

$$I_1=\int u\,dv \qquad .....(9)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I_1 في (9) ، نجد ان :

$$I_1=uv-\int v\,du \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن u,du,v من (8) ، (6) ، (4) على الترتيب في (10) ، نجد ان :

$$I_1=x\frac{1}{2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}-\int\frac{1}{2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{x}{2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{n-1}}dx \qquad ...(11)$$

بالتعويض عن قيمة I_1 من (11) في (2) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{n-1}}dx + \frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{n-1}}dx\right\}$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left\{1-\frac{1}{2(n-1)}\right\}\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{n-1}}dx$$

$$= \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2a^2(n-1)}\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{n-1}}dx \quad \dots(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

227 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \;;\; a>0 \;;\; |x|<|a|$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \dots(1)$$

لنعبر أولاً عن x بدلالة دالة الظل الزائدي في الصورة :

$$x = a\tanh t \quad \dots(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\,\text{sech}^2 t\,dt \quad \dots(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \sqrt{a^2 - a^2\tanh^2 t}\; a\,\text{sech}^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \sqrt{1-\tanh^2 t}\;\text{sech}^2 t\,dt \quad \dots(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1-\tanh^2 t = \text{sech}^2 t \quad \dots(5)$$

$$I = a^2\int \sqrt{\text{sech}^2 t}\;\text{sech}^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \text{sech}\,t\;\text{sech}^2 t\,dt$$

$$= a^2\int \text{sech}\,t\; d(\tanh t) \quad \dots(6)$$

ولحساب I في (6) سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = sech\ t \qquad .....(7)$$

$$dv = d\left(tanh\,t\right) \qquad .....(8)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (7) ، نجد ان :

$$du = -sech\ t\ tanh\,t\ dt \qquad .....(9)$$

وبتكامل الطرفين في (8) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} v &= \int d\left(tanh\,t\right) \\ &= tanh\,t \qquad ...(10)... \end{aligned}$$

وباستخدام (8) ، (7) في (6) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = a^2 \int u\,dv \qquad ...(11)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (11) ، نجد ان :

$$I = a^2 \left\{uv - \int v\,du\right\} \qquad ...(12)$$

بالتعويض عن u, du, v من (10) ، (9) ، (7) على الترتيب في (12) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= a^2 \left\{sech\ t\,tanh\,t - \int tanh\,t\left(-sech\ t\,tanh\,t\,dt\right)\right\} \\ &= a^2 \left\{sech\ t\ tanh\,t + \int tanh^2 t\ sech\ t\ dt\right\} \end{aligned}$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية (5) :

$$\begin{aligned} I &= a^2 \left\{sech\ t\,tanh\,t + \int \left(1 - sech^2 t\right) sech\,t\,dt\right\} \\ &= a^2 \left\{sech\ t\,tanh\,t + \int sech\ t\ dt - \int sech^3 t\ dt\right\} \end{aligned}$$

فإذا لاحظنا أن التكامل الأخير في الطرف الأيمن هو I :

$$2\,I = a^2 \left\{sech\ t\,tanh\,t + \int sech\ t\ dt\right\} \qquad ...(13)$$

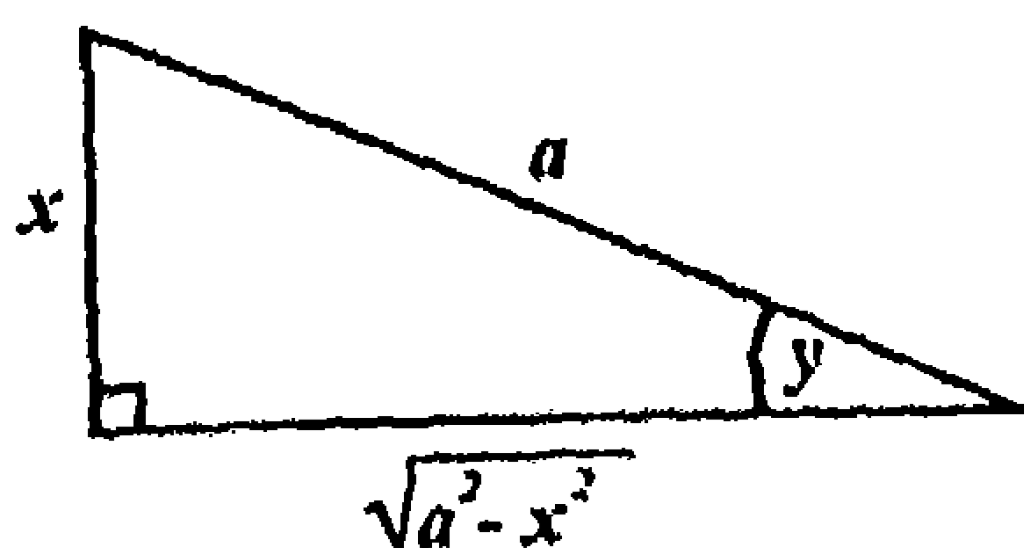
ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (13) ، نستخدم العلاقة (89) :

$$2\,I = a^2 \left\{sech\ t\,tanh\,t + tan^{-1}\left(sinh\,t\right)\right\} + C$$

ولحساب $sinh\,t$ نستخدم المتطابقة الزائدية :

$$\begin{aligned} sinh\,t &= \frac{tanh\,t}{\sqrt{1 - tanh^2 t}} \\ &= \frac{(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$2I = a^2\left\{\operatorname{sech} t \tanh t + \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right\} + C \qquad \ldots(14)$$



ومن المثلث القائم الزاوية المجاور نجد أن

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

وباستخدام (5) لحساب $\operatorname{sech} t$ والتعويض في (14) ، نجد أن :

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \ldots(15)$$

من (15) و (1) يثبت صحة المطلوب .

228

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad \ldots(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sin u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad \ldots(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\,du \qquad \ldots(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int a\sin u\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\;a\cos u\,du$$

$$= a^3\int \sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du \qquad \ldots(4)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad \ldots(5)$$

$$I = a^3\int \sin u\sqrt{\cos^2 u}\cos u\,du$$

$$= a^3\int \cos^2 u\sin u\,du \qquad \ldots(6)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$d(\cos u) = -\sin u\, du \qquad .....(7)$$

$$I = -a^3 \int \cos^2 u\, d(\cos u)$$

والتكامل في الطرف الأيمن على الصورة $\int z^n dz$

$$\therefore I = -a^3\left(\frac{\cos^3 u}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{a^3}{3}\cos^3 u + C \qquad .....(8)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (5) لحساب $\cos u$:

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$$

$$= \sqrt{1-(x/a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\cos u$ من (9) في (8) ، نجد ان :

$$I = -\frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + C \qquad ...(10)$$

من (10) ، (1) يثبت صحة المطلوب .

229

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}\left(a^2-2x^2\right) + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ; \quad a>0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \quad ..... (3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int a^2 \sin^2 u \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}\,(a\cos u\, du)$$

$$= a^4 \int \sin^2 u \sqrt{1 - \sin^2 u}\, \cos u\, du \quad ..... (4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1 - \sin^2 u = \cos^2 u \quad ..... (5)$$

$$I = a^4 \int \sin^2 u \cos^2 u\, du$$

بضرب الدالة المتكاملة بسطا ومقاما في 4 ، نجد ان:

$$= \frac{a^4}{4} \int (2\sin u \cos u)^2 du \quad ..... (6)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u \quad ..... (7)$$

$$I = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2u\, du \quad ..... (8)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad ..... (9)$$

$$I = \frac{a^4}{4} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4u) du$$

$$= \frac{a^4}{8} \int (1 - \cos 4u) du$$

$$= \frac{a^4}{8} \int du - \frac{a^4}{8} \int \cos 4u\, du$$

$$= \frac{a^4}{8} u - \frac{a^4}{8} \left(\frac{\sin 4u}{4} \right) + C \quad ... (10)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (7) مرتين على التتابع ، نجد أن :

$$I = \frac{a^4}{8} u - \frac{a^4}{8} \left(\frac{2\sin 2u \cos 2u}{4} \right) + C$$

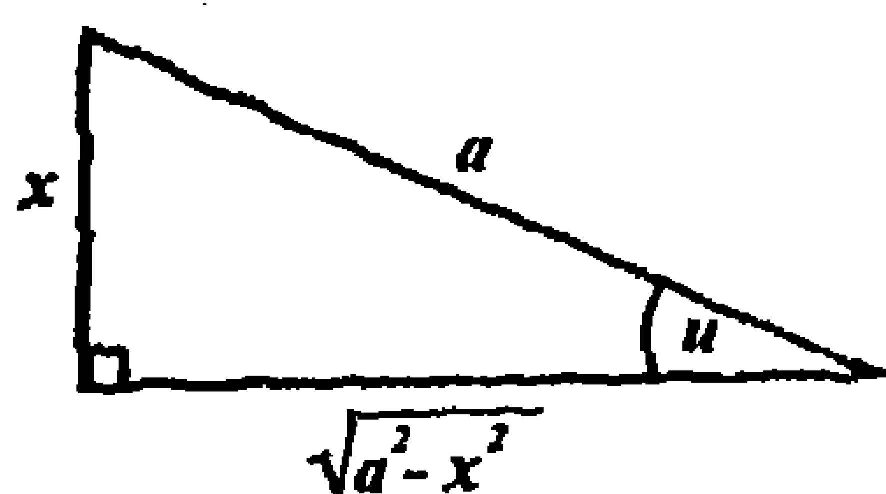
$$= \frac{a^4}{8} u - \frac{a^4}{8} \left(\frac{4\sin u \cos u \cos 2u}{4} \right) + C \quad ... (11)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u \quad ... (12)$$

$$I = \frac{a^4}{8} u - \frac{a^4}{8} \left\{ \sin u \cos u \left(\cos^2 u - \sin^2 u \right) \right\} + C \quad ... (13)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\cos u$ ، $\sin u$ بدلالة x والتعويض بهما في (13) ، نجد أن :



$$I=\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{a^4}{8}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)+C$$

$$=\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{8}\sqrt{a^2-x^2}\left(a^2-2x^2\right)+C \qquad ...(14)$$

من (14) و (1) يثبت صحة المطلوب .

230

$$\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ ;\ n\neq-2$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\int x^{n-1}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u=x^{n-1} \qquad .....(2)$$

$$dv=\sqrt{a^2-x^2}\,xdx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du=(n-1)x^{n-2}\,dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$\int dv=\int\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(-x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(a^2-x^2\right) \qquad .....(5)$$

والتكامل في الطرف الأيمن في (5) على الصورة $\int u^n du$

$$v = -\frac{1}{2}\left\{ \frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{3/2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} \quad \text{.....}(6)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \quad \text{.....}(7)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (7) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \quad \text{.....}(8)$$

بالتعويض عن u, du, v من (6) ، (4) ، (2) على الترتيب في (8) ، نجد أن :

$$I = x^{n-1}\left\{-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\right\} - \int -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\cdot(n-1)x^{n-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + \frac{1}{3}(n-1)\int x^{n-2}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx \quad \text{.....}(9)$$

$$= -\frac{1}{3}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + \frac{1}{3}(n-1)\int x^{n-2}\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} +$$

$$\frac{1}{3}(n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx - \frac{1}{3}(n-1)\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \text{...}(10)$$

بضرب طرفي (10) في 3 ، نجد أن :

$$3I = -x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} +$$

$$(n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx - (n-1)\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \text{...}(11)$$

والتكامل الأخير في الطرف الأيمن في (11) هو التكامل في (1) :

$$3I = -x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + (n-1)a^2\int x^{n-2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx - (n-1)I$$

$$3I + (n-1)I = -x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + (n-1)a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$I = -\frac{1}{n+2}x^{n-1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} + \frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \text{...}(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

231

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = \frac{x}{8}\sqrt{a^2 - x^2}\left(5a^2 - 2x^2\right) + \frac{3}{8}a^4 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ; \; a > 0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), x \in (-a; a) \qquad \text{.....}(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a \cos u \, du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \left(a^2 - a^2 \sin^2 u\right)^{3/2} (a \cos u \, du)$$

$$= a^4 \int \left(1 - \sin^2 u\right)^{3/2} (\cos u \, du) \qquad \text{.....}(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1 - \sin^2 u = \cos^2 u \qquad \text{.....}(5)$$

$$I = a^4 \int \left(\cos^2 u\right)^{3/2} \cos u \, du$$

$$= a^4 \int \cos^4 u \, du \qquad \text{.....}(6)$$

لنعبر الآن عن $\cos^4 u$ بدلالة مضاعفات الزاوية u باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

$$\cos^4 u = \left(\cos^2 u\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2u)\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1 + 2\cos 2u + \frac{1}{2}(1 + \cos 4u)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{3 + 4\cos 2u + \cos 4u\right\} \qquad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن $cos^4 u$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I = a^4 \int \frac{1}{8}\{3 + 4\cos 2u + \cos 4u\}du$$

$$= \frac{a^4}{8}\left\{3u + \frac{4\sin 2u}{2} + \frac{\sin 4u}{4}\right\} + C \quad .....(8)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad .....(9)$$

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{3u + \frac{4(2\sin u\cos u)}{2} + \frac{2\sin 2u\cos 2u}{4}\right\} + C$$

$$= \frac{a^4}{8}\left\{3u + 4\sin u\cos u + \frac{2(2\sin u\cos u)\cos 2u}{4}\right\} + C$$

$$= \frac{a^4}{8}\{3u + \sin u\cos u\,(4 + \cos 2u)\} + C \quad ...(10)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \quad ...(11)$$

$$I = \frac{a^4}{8}\{3u + \sin u\cos u\,(5 - 2\sin^2 u)\} + C \quad ...(12)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (5) لحساب قيمة $\cos u$ بدلالة x ، نجد ان :

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$I = \frac{a^4}{8}\left\{3\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\left(5 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)\right\} + C$$

$$= \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{8}\sqrt{a^2 - x^2}\,(5a^2 - 2x^2) + C \quad ...(13)$$

من (13) و (1) يثبت صحة المطلوب .

232

$$\int x\,(a^2 - x^2)^{3/2}dx = -\frac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int x\,(a^2 - x^2)^{3/2}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} \qquad \text{.....}(2)$$

$$dv = x dx \qquad \text{.....}(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{3}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}\left(-2x dx\right)$$

$$= -3x\left(a^2 - x^2\right)^{1/2} dx \qquad \text{.....}(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$\int dv = \int x\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int d\left(-x^2\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\int d\left(a^2 - x^2\right)$$

$$v = -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right) \qquad \text{.....}(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\, dv \qquad \text{.....}(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\, du \qquad \text{.....}(7)$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \left(a^2 - x^2\right)^{3/2}\left\{-\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)\right\} - \int -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)\left\{-3x\left(a^2 - x^2\right)^{1/2} dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{5/2} - \frac{3}{2}\int x\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx \qquad \text{.....}(8)$$

فإذا لاحظنا أن التكامل في الطرف الأيمن في (8) هو التكامل في (1) ، فإن :

$$I = -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{5/2} - \frac{3}{2} I + C$$

$$I + \frac{3}{2} I = -\frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{5/2} + C$$

$$I = -\frac{1}{5}\left(a^2 - x^2\right)^{5/2} + C \qquad \text{.....}(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int \frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{x}dx = \frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3 \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$$

233

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}{x}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{\left(a^2-a^2\sin^2 u\right)^{3/2}}{a\sin u} a\cos u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{\left(1-\sin^2 u\right)^{3/2}}{\sin u}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = a^3 \int \frac{\left(\cos^2 u\right)^{3/2}}{\sin u}\cos u\, du$$

$$= a^3 \int \frac{\cos^4 u}{\sin u} du$$

باستخدام المتطابقة المثلثية (5) للتعبير عن $\cos^2 u$ بدلالة $\sin^2 u$:

$$I = a^3 \int \frac{\left(1-\sin^2 u\right)^2}{\sin u} du$$

$$= a^3 \int \frac{1-2\sin^2 u+\sin^4 u}{\sin u} du$$

$$= a^3 \int \left(\sin^3 u - 2\sin u + \operatorname{cosec} u\right) du$$

$$= a^3 \left\{\int \sin^3 u\, du - 2\int \sin u\, du + \int \operatorname{cosec} u\, du\right\}$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية (5) يمكن التعبير عن $\sin^3 u$ في الصورة :

$$\sin^3 u = \sin^2 u \cdot \sin u$$

$$= \left(1-\cos^2 u\right)\sin u$$

$$= \sin u - \cos^2 u \sin u \qquad .....(6)$$

$$I = a^3 \left\{ \int \sin u\, du - \int \cos^2 u \sin u\, du - 2\int \sin u\, du + \int cosec\ u\ du \right\}$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا أن :

$$-\sin u\, du = d\,(\cos u) \qquad .....(7)$$

$$I = a^3 \left\{ \int d\,(\cos u) + \int \cos^2 u\, d\,(\cos u) + \int cosec\ u\ du \right\}$$

$$= a^3 \left\{ \cos u + \frac{1}{3}\cos^3 u - \ln\left| cosec\ u + \cot u \right| \right\} + C \qquad .....(8)$$

ولحساب $\cos u$ نستخدم المتطابقة المثلثية (5) :

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

$$= \sqrt{1 - (x/a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \qquad .....(9)$$

ولحساب $\cot u$ نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \Big/ \frac{x}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \qquad ...(10)$$

ومن (2) نجد أن :

$$cosec\ u = \frac{1}{\sin u}$$

$$= \frac{1}{(x/a)}$$

$$= \frac{a}{x} \qquad ....(11)$$

بالتعويض عن $\cos u, \cot u, cosec\ u$ من (11) ، (10) ، (9) على الترتيب في (8) نجد أن :

$$I = a^3 \left\{ \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)^3 - \ln\left| \frac{a}{x} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \right\} + C$$

$$= a^2 \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} - a^3 \ln\left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \qquad ...(12)$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب

234

$$\int x^n\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2-x^2}dx\ \ ;\ n\neq-1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int x^n\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx \qquad .....(1)$$

ولحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u=\left(a^2-x^2\right)^{3/2} \qquad .....(2)$$

$$dv=n^n dx \qquad .....(3)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du=\frac{3}{2}\left(a^2-x^2\right)^{1/2}\left(-2x dx\right)=-3x\left(a^2-x^2\right)^{1/2}dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$\int dv=\int x^n\,dx$$

$$v=\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad .....(5)$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I=\int u dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I=uv-\int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{-3x\left(a^2-x^2\right)^{1/2}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{3}{n+1}\int x^{n+2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\text{235} \quad \int \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n dx = \frac{1}{n+1} x \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n + \frac{na^2}{n+1} \int \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx \quad ; \quad n \neq -1$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n dx \qquad \text{..... (1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن :

$$u = \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n \qquad \text{..... (2)}$$

$$dv = dx \qquad \text{..... (3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = n\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x\,dx)$$

$$= -nx\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx \qquad \text{..... (4)}$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$v = x \qquad \text{..... (5)}$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad \text{..... (6)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad \text{..... (7)}$$

بالتعويض عن u, du, v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I = \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n \cdot x - \int x\left\{-nx\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx\right\}$$

$$= x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n + n\int x^2\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n + n\,I_1 \qquad \text{..... (8)}$$

حيث افترضنا أن :

$$I_1 = \int x^2\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= -\int \left(-x^2\right)\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= -\int \left\{\left(a^2-x^2\right)-a^2\right\}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= -\int \left(a^2-x^2\right)\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx + a^2\int \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= -\int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx + a^2 \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$= -\int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n dx + a^2 \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx \qquad \text{.....(9)}$$

والتكامل الأول في الطرف الأيمن في (9) هو التكامل في (1) :

$$I_1 = -I + a^2 \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx \qquad \text{...(10)}$$

وبالتعويض عن I_1 من (10) في (8) ، نجد ان :

$$I = x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n + n\left\{-I + a^2 \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx\right\}$$

$$I + n\,I = x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n + na^2 \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx \qquad \text{...(11)}$$

بقسمة طرفي (11) على $(n+1)$ ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{n+1} x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n + \frac{na^2}{n+1} \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n-2} dx \qquad \text{...(12)}$$

من (12) و (1) يثبت صحة المطلوب .

236

$$\int x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n dx = -\frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n dx \qquad \text{.....(1)}$$

من قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$\begin{aligned} xdx &= \frac{1}{2} d\left(x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2} d\left(-x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2} d\left(a^2 - x^2\right) \qquad \text{.....(2)} \end{aligned}$$

بالتعويض عن xdx من (2) في (1) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n \left\{-\frac{1}{2} d\left(a^2 - x^2\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n d\left(a^2 - x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(a^2 - x^2\right)^{n/2} d\left(a^2 - x^2\right) \qquad \text{.....(3)} \end{aligned}$$

والتكامل في (3) على الصورة $\int u^n du$ وحيث ان :

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$$

$$\therefore\; I = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}{(n/2)+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{2\,\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\right\} + C$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C \qquad .....(4)$$

من (4) و (1) يثبت صحة المطلوب .

237

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ; \; a > 0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\tanh u \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\,\text{sech}^2 u\;du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2\tanh^2 u}}\,a\,\text{sech}^2 u\;du$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}}\,\text{sech}^2 u\;du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1 - \tanh^2 u = \text{sech}^2 u \qquad .....(5)$$

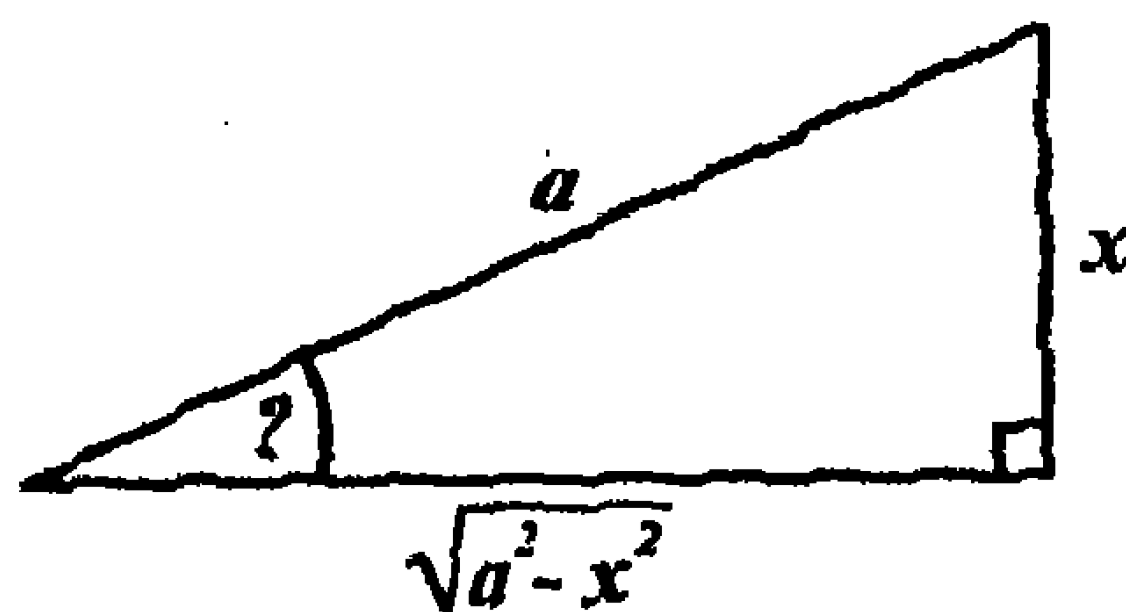
$$I = \int \frac{1}{\sqrt{\text{sech}^2 u}}\,\text{sech}^2 u\;du$$

$$= \int \text{sech}\,u\;du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) نستخدم العلاقة (89) ، فنجد ان :

$$I = \tan^{-1}(\sinh u) + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\sinh u$ نستخدم المتطابقة الزائدية :



$$\sinh u = \frac{\tanh u}{\sqrt{1-\tanh^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$I = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C$$

وواضح من المثلث اعلاه ان :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

وبالتالي يمكن صياغة I على الصورة :

$$I = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

238

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n} dx = \frac{x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)} + \frac{n-3}{a^2(n-2)} \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2}} dx \; ; \; n \neq 2$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a \sin u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), x \in (-a; a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن قيمة x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}\right)^n} a\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\left(\sqrt{1-\sin^2 u}\right)^n} \cos u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\cos^2 u}\right)^n} \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{a^{n-1}} \int \frac{1}{\cos^{n-1} u} du$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\frac{1}{\cos u} = \sec u \qquad .....(6)$$

$$I = \frac{1}{a^{n-1}} \int \sec^{n-1} u\,du \qquad .....(7)$$

ولحساب التكامل في (7) نستخدم العلاقة (27) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^{n-1}} \left\{ \frac{\sec^{n-3} u\tan u}{(n-2)} + \frac{n-3}{n-2} \int \sec^{n-3} u\,du \right\} \qquad .....(8)$$

ولحساب $\sec u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\sec u = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad .....(9)$$

ولحساب $\tan u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad ...(10)$$

بالتعويض عن $\tan u$ ، $\sec u$ من (10) ، (9) على الترتيب في (8) ، نجد ان :

$$I=\frac{1}{a^{n-1}}\left\{\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{n-3}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{(n-2)}+\frac{n-3}{n-2}\int\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{n-3}\right.$$

$$\left.+\frac{n-3}{n-2}\int\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{a\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{a^{n-1}}\left\{\frac{xa^{n-3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{2-n}}{n-2}+\frac{n-3}{n-2}\int\frac{a^{n-3}}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2}}dx\right\}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{2-n}}{a^2(n-2)}+\frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{1}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^{n-2}}dx \qquad ...(11)$$

من (11) و (1) يثبت صحة المطلوب .

239

$$\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\sqrt{a^2-x^2}+C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x=a\sin u \quad ;u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x\in(-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx=a\cos u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان ،

$$I=\int\frac{a\sin u}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}a\cos u\,du$$

$$=a\int\frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u=\cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I=a\int \frac{\sin u}{\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\,du$$

$$=a\int \sin u\,du$$

$$=-a\cos u+C \qquad .....(6)$$

ولحساب قيمة $\cos u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية (5) :

$$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}$$

$$=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad .....(7)$$

$$I=-a\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

240

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I=\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x=a\sin u \quad ;u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ x\in(-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx=a\cos u\,du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) في (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I=\int \frac{1}{a\sin u\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}a\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u=\cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin u\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\, du$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin u}du$$

$$=\frac{1}{a}\int \operatorname{cosec} u\, du \qquad .....(6)$$

ولحساب التكامل في (6) نستخدم العلاقة (28) ، نجد ان

$$I=\frac{1}{a}\left\{-\ln\left|\operatorname{cosec} u+\cot u\right|\right\}+C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\operatorname{cosec} u$ نستخدم المتطابقة :

$$\operatorname{cosec} u=\frac{1}{\sin u}$$

$$=\frac{1}{(x/a)}$$

$$=\frac{a}{x} \qquad .....(8)$$

ولحساب $\cot u$ نستخدم المتطابقة :

$$\cot u=\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}$$

$$=\frac{\sqrt{1-(x/a)^2}}{(x/a)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^x}}{x} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\operatorname{cosec} u , \cot u$ من (9) ، (8) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$I=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^x}}{x}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^x}}{x}\right|+C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

241

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \; ; \; a>0$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u = x \qquad .....(2)$$

$$\begin{aligned} dv &= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= \frac{-1}{2}\frac{d\left(-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2}\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad .....(3) \end{aligned}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$du = dx \qquad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} v &= \int -\frac{1}{2}\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a^2-x^2}\right) \\ &= -\sqrt{a^2-x^2} \qquad .....(5) \end{aligned}$$

باستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد ان I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \qquad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد ان :

$$I = uv - \int v\,du \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} I &= x\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)-\int\left(-\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \\ &= -x\sqrt{a^2-x^2}+\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad .....(8) \end{aligned}$$

ولحساب التكامل في الطرف الأيمن في (8) ، نستخدم العلاقة (227) ، نجد ان :

$$I = -x\sqrt{a^2-x^2} + \left\{ \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right\} + C$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C \qquad 242$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

لحساب I ، سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a^2\sin^2 u\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}(a\cos u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2 u\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2 u\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\sin^2 u}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \operatorname{cosec}^2 u\, du$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cot u + C \qquad .....(6)$$

ولحساب $\cot u$ نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\cot u = \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u} = \frac{\sqrt{1-(x/a)^2}}{(x/a)} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \quad \text{..... (7)}$$

وبالتعويض عن $\cot u$ من (7) في (6) ، نجد أن :

$$I = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C \quad \text{..... (8)}$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

243

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx \quad \text{..... (1)}$$

لنعبر أولاً عن المتغير x بدلالة دالة الظل الزائدي في الصورة :

$$x = a \tanh u \quad \text{..... (2)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\, \text{sech}^2 u\, du \quad \text{..... (3)}$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \tanh^2 u}}{a \tanh u}\left(a\, \text{sech}^2 u\, du\right) = a\int \frac{\sqrt{1-\tanh^2 u}}{\tanh u} \text{sech}^2 u\, du \quad \text{..... (4)}$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1-\tanh^2 u = \text{sech}^2 u \quad \text{..... (5)}$$

$$I = a\int \frac{\sqrt{\text{sech}^2 u}}{\tanh u} \text{sech}^2 u\, du = a\int \frac{\text{sech}\, u}{\tanh u} \text{sech}^2 u\, du$$

باستخدام المتطابقتين الزائدتين :

$$sech\, u = \frac{1}{cosh\, u} \quad , \quad tanh\, u = \frac{sinh\, u}{cosh\, u} \qquad .....(6)$$

$$I \;= a\int \frac{1}{cosh\, u} \cdot \frac{cosh\, u}{sinh\, u}\, sech^2 u\, du$$

$$= a\int \frac{1}{sinh\, u}\, sech^2 u\, du$$

وباستخدام المتطابقة الزائدية :

$$cosech\, u = \frac{1}{sinh\, u} \qquad .....(7)$$

$$I \;= a\int cosech\, u\;\; sech^2 u\, du \qquad .....(8)$$

ولحساب التكامل في *(8)* نستخدم قانون التكامل بالتجزيء ، ولنفترض ان :

$$u_1 = cosech\, u \qquad .....(9)$$

$$dv_1 = sech^2 u\, du \qquad ...(10)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي *(9)* ، نجد أن :

$$du_1 = -cosech\, u\;\; coth\, u\, du \qquad ...(11)$$

وبتكامل الطرفي في *(10)* ، نجد أن :

$$\int dv_1 \;= \int sech^2 u\, du$$

$$= \int d\,(tanh\, u)$$

$$v_1 = tanh\, u \qquad ...(12)$$

وباستخدام *(10)* ، *(9)* في *(8)* ، نجد أن *I* تأخذ الصورة :

$$I \;= a\int u_1\, dv_1 \qquad ...(13)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب *I* في *(13)* ، نجد أن :

$$I \;= a\left\{u_1 v_1 - \int v_1\, du_1\right\} \qquad ...(14)$$

بالتعويض عن u_1, du_1, v_1 من *(12)* ، *(11)* ، *(9)* على الترتيب في *(14)* ، نجد أن :

$$I \;= a\left\{ cosech u\;\; tanh\, u - \int tanh\, u\,(-cosech\, u\; coth\, u)du \right\}$$

$$= a\, sech\, u + a\int cosech\, u\;\, du \qquad ...(15)$$

ولحساب التكامل في *(15)* نستخدم العلاقة *(93)* ، نجد أن :

$$I \;= a\; sech\, u - a\, ln\left|cosech\, u + coth\, u\right| + C \qquad ...(16)$$

ونوجد $\coth u$, $cosech\, u$, $sech\, u$ كما يلي :

$$\begin{aligned} sech\, u &= \sqrt{1-\tanh^2 u} \\ &= \sqrt{1-(x/a)^2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cosech\, u &= \frac{\sqrt{1-\tanh^2 u}}{\tanh u} \\ &= \frac{\sqrt{a^2-x^2}/a}{x/a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \coth u &= \frac{1}{\tanh u} \\ &= \frac{a}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= a\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} - a\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right| + C \\ &= \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C \qquad \text{...(17)} \end{aligned}$$

من (17) و (1) يثبت صحة المطلوب .

244

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \;\; ; \;\; a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx \qquad \text{.....(1)}$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتجزيء ، ولنفترض أن:

$$u = \sqrt{a^2-x^2} \qquad \text{.....(2)}$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad \text{.....(3)}$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$du = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x\,dx)$$

$$= \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad .....(4)$$

وبتكامل الطرفين في (3) ، نجد أن :

$$v = \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int x^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} \quad .....(5)$$

وباستخدام (3) ، (2) في (1) ، نجد أن I تأخذ الصورة :

$$I = \int u\,dv \quad .....(6)$$

وباستخدام قانون التكامل بالتجزيء لحساب I في (6) ، نجد أن :

$$I = uv - \int v\,du \quad .....(7)$$

بالتعويض عن u,du,v من (5) ، (4) ، (2) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \sqrt{a^2-x^2}\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad .....(8)$$

ولحساب التكامل في (8) نستخدم القاعدة (237) ، نجد أن :

$$I = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

245

$$\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx \quad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a \tanh u \qquad \text{.....}(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\, \text{sech}^2 u\ du \qquad \text{.....}(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2 - a^2 \tanh^2 u\right)^{3/2}} \left(a\, \text{sech}^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(1 - \tanh^2 u\right)^{3/2}} \left(\text{sech}^2 u\, du\right) \qquad \text{.....}(4)$$

باستخدام المتطابقة الزائدية :

$$1 - \tanh^2 = \text{sech}^2 u \qquad \text{.....}(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\text{sech}^2 u\right)^{3/2}} \text{sech}^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\text{sech}\, u} du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \cosh u\, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \sinh u + C \qquad \text{.....}(6)$$

ولحساب $\sinh u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة :

$$\sinh u = \frac{\tanh u}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$I = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C \qquad \text{.....}(7)$$

من (7) و (1) يثبت صحة المطلوب .

246

$$\int \frac{x}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} dx \qquad \text{.....}(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a\sin u}{\left(a^2 - a^2\sin^2 u\right)^{3/2}}\left(a\cos u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sin u}{\left(1-\sin^2 u\right)^{3/2}}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\sin u}{\left(\cos^2 u\right)^{3/2}}\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sin u\, du}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{-1}{a}\int \frac{1}{\cos^2 u}\, d\left(\cos u\right) \qquad .....(6)$$

والتكامل في (6) على الصورة $\int u^n\, du$

$$I = \frac{-1}{a}\left(\frac{-1}{\cos u}\right) + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\cos u$ نستخدم المتطابقة المثلثية (5) ، حيث :

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$$

$$= \sqrt{1-\left(x/a\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$I = \frac{-1}{a}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$\boxed{247}\quad \int \frac{1}{x(a^2-x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{1}{x(a^2-x^2)^{3/2}}dx$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{1}{a\sin u\,(a^2-a^2\sin^2 u)^{3/2}} a\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sin u\,(1-\sin^2 u)^{3/2}}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sin u\,(\cos^2 u)^{3/2}}\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sin u\cos^2 u}du$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\frac{1}{\cos u} = \sec u \qquad .....(6)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{\sec^2 u}{\sin u}du \qquad .....(7)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1+\tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2}+n\pi \qquad .....(8)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \frac{1+\tan^2 u}{\sin u}du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \left\{\frac{1}{\sin u}+\frac{\tan^2 u}{\sin u}\right\}du \qquad .....(9)$$

باستخدام المتطابقتين المثلثتين :

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} \quad ; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u} \qquad \dots(10)$$

$$I = \frac{1}{a^3}\int \left\{ \operatorname{cosec} u + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{\sin u} \right\} du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \operatorname{cosec} u \, du + \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\cos^2 u} \sin u \, du$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \operatorname{cosec} u \, du - \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\cos^2 u} d(\cos u) \qquad \dots(11)$$

ولحساب التكامل الأول في الطرف الأيمن من *(11)* نستخدم العلاقة *(28)* ، بينما التكامل الثاني على الصورة $\int u^n du$.

$$I = \frac{1}{a^3}\{-\ln|\operatorname{cosec} u + \cot u|\} - \frac{1}{a^3}\left\{\frac{-1}{\cos u}\right\}$$

$$= -\frac{1}{a^3}\ln|\operatorname{cosec} u + \cot u| + \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\cos u}\right) \qquad \dots(12)$$

ولحساب $\operatorname{cosec} u$ نستخدم المتطابقة :

$$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{(x/a)} = \frac{a}{x} \qquad \dots(13)$$

ولحساب $\cot u$ نستخدم المتطابقة :

$$\cot u = \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u} = \frac{\sqrt{1-(x/a)^2}}{(x/a)} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \qquad \dots(14)$$

ولحساب $\cos u$ نستخدم المتطابقة :

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-(x/a)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad \dots(15)$$

بالتعويض عن $cosec\,u$, $cot\,u$, $cos\,u$ من (15) ، (14) ، (13) على الترتيب في (12)، نجد أن:

$$I = -\frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+\frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C \qquad \ldots(16)$$

من (16) و (1) يثبت صحة المطلوب .

248

$$\int\frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C \;\; ; \; a>0$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int\frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\sin u \qquad ; u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\; x\in(-a;a) \qquad \ldots\ldots(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\,du \qquad \ldots\ldots(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int\frac{a^2\sin^2 u}{(a^2-a^2\sin^2 u)^{3/2}}a\cos u\,du$$

$$= \int\frac{\sin^2 u}{(1-\sin^2 u)^{3/2}}\cos u\,du \qquad \ldots\ldots(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u=\cos^2 u \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$I = \int\frac{\sin^2 u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\cos u\,du$$

$$= \int\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}du$$

$$= \int\tan^2 u\,du \qquad \ldots\ldots(6)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\tan^2 u=\sec^2 u-1 \qquad ; u\neq\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$I = \int \left(sec^2 u - 1\right) du$$
$$= \int sec^2 u\, du - \int du$$
$$= tan\, u - u + C \qquad .....(8)$$

ولحساب $tan\, u$ نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$tan\, u = \frac{sin\, u}{\sqrt{1 - sin^2 u}}$$
$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$
$$I = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad .....(9)$$

من (9) و (1) يثبت صحة المطلوب .

249 $$\int \frac{1}{x^2 \left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^4}\left\{ -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{1}{x^2 \left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض أن :

$$x = a\, sin\, u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), x \in (-a; a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\, cos\, u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x, dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{a^2 sin^2 u \left(a^2 - a^2 sin^2 u\right)^{3/2}} a\, cos\, u\, du$$
$$= \frac{1}{a^4} \int \frac{1}{sin^2 u \left(1 - sin^2 u\right)^{3/2}} cos\, u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1 - sin^2 u = cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\sin^2 u\left(\cos^2 u\right)^{3/2}}\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\sin^2 u\cos^2 u}du \qquad .....(6)$$

لنعبر عن بسط دالة التكامل في (6) على الصورة :

$$1 = \sin^2 u + \cos^2 u$$

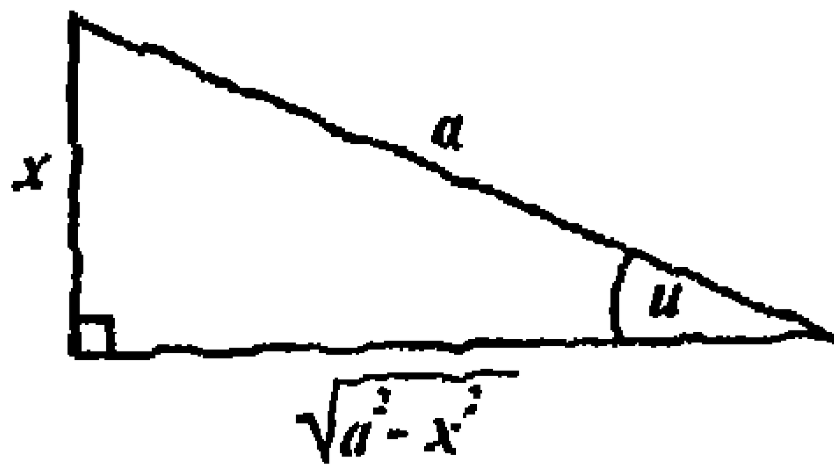
$$I = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\sin^2 u\cos^2 u}du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \left\{\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{1}{\cos^2 u}\right\}du$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\int \operatorname{cosec}^2 u\, du + \int \sec^2 u\, du\right\}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{-\cot u + \tan u\right\} + C \qquad .....(7)$$

وباستخدام (2) في المثلث القائم الزاوية المجاور وذلك لحساب قيمة كل من $\tan u$ ، $\cot u$ نجد أن :



$$\tan u = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad .....(8)$$

$$\cot u = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \qquad .....(9)$$

بالتعويض عن $\tan u$, $\cot u$ من (9) ، (8) على الترتيب في (7) ، نجد أن :

$$I = \frac{1}{a^4}\left\{-\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right\} + C \qquad ...(10)$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

$$250 \qquad \int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{5/2}}dx = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}\right\} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{5/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \quad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{1}{\left(a^2-a^2\sin^2 u\right)^{5/2}} a\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\left(1-\sin^2 u\right)^{5/2}}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\left(\cos^2 u\right)^{5/2}}\cos u\, du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{1}{\cos^4 u}du \qquad .....(6)$$

لنعبر عن بسط الدالة المتكاملة في (6) على الصورة :

$$1 = \sin^2 u + \cos^2 u$$

$$I = \frac{1}{a^4}\int \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^4 u}du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \left\{\frac{\sin^2 u}{\cos^4 u} + \frac{\cos^2 u}{\cos^4 u}\right\}du$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \left\{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\cos^2 u}\right\}du$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\int \tan^2 u\sec^2 u\, du + \int \sec^2 u\, du\right\}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\int \tan^2 u\, d(\tan u) + \int d(\tan u)\right\}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\frac{1}{3}\tan^3 u + \tan u\right\} + C \qquad .....(7)$$

ولحساب $\tan u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة :

$$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{x/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{a^4}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}+C$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}\right\}+C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .

251

$$\int \frac{x}{\left(a^2-x^2\right)^{5/2}}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}+C$$

الشرح والحل

لنفترض أن:

$$I = \int \frac{x}{\left(a^2-x^2\right)^{5/2}}dx \qquad .....(1)$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

$$x = a\sin u \qquad ; u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ x \in (-a;a) \qquad .....(2)$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد أن :

$$dx = a\cos u\, du \qquad .....(3)$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد أن :

$$I = \int \frac{a\sin u}{\left(a^2-a^2\sin^2 u\right)^{5/2}}(a\cos u\, du)$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{\sin u}{\left(1-\sin^2 u\right)^{5/2}}\cos u\, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1-\sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

ومن قوانين التفاضلات معلوم لدينا ان :

$$I = \frac{1}{a^3} \int \frac{\sin u}{(\cos^2 u)^{5/2}} \cos u \, du = \frac{1}{a^3} \int \frac{\sin u \, du}{\cos^4 u}$$

..... (6)

$$\sin u \, du = -d(\cos u)$$

..... (7)

$$I = \frac{-1}{a^3} \int \frac{d(\cos u)}{\cos^4 u}$$

والتكامل في (7) على الصورة $\int u^n \, du$

..... (8)

$$I = -\frac{1}{a^3} \left\{ -\frac{1}{3\cos^3 u} \right\} + C = \frac{1}{3a^3} \frac{1}{\cos^3 u} + C$$

ولحساب $\cos u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة (5) :

..... (9)

$$\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{1-(x/a)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

بالتعويض عن $\cos u$ من (9) في (8) ، نجد ان :

... (10)

$$I = \frac{1}{3} \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}} + C$$

من (10) و (1) يثبت صحة المطلوب .

252

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{5/2}} = \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{(a^2-x^2)^{3/2}} + C$$

الشرح والحل

لنفترض ان:

..... (1)

$$I = \int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{5/2}} \, dx$$

لحساب I سنستخدم طريقة التكامل بالتعويض ، ولنفترض ان :

..... (2) $x \in (-a;a)$, $;u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$x = a \sin u$$

بإجراء التفاضلات لطرفي (2) ، نجد ان :

..... (3)

$$dx = a \cos u \, du$$

بالتعويض عن x,dx من (3) ، (2) على الترتيب في (1) ، نجد ان :

$$I = \int \frac{a^2 \sin^2 u}{\left(a^2 - a^2 \sin^2 u\right)^{5/2}} \left(a \cos u \, du\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sin^2 u}{\left(1 - \sin^2 u\right)^{5/2}} \cos u \, du \qquad .....(4)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية :

$$1 - \sin^2 u = \cos^2 u \qquad .....(5)$$

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sin^2 u}{\left(\cos^2 u\right)^{5/2}} \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \tan^2 u \sec^2 u \, du$$

ومعلوم لدينا ان : $\sec^2 u \, du = d(\tan u)$ ولذا :

$$I = \frac{1}{a^2} \int \tan^2 u \, d(\tan u)$$

والتكامل اعلاه على الصورة $\int z^n dz$ ولذا :

$$I = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{3} \tan^3 u \right) + C$$

$$= \frac{1}{3a^2} \tan^3 u + C \qquad .....(6)$$

ولحساب $\tan u$ بدلالة x نستخدم المتطابقة المثلثية :

$$\tan u = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}}$$

$$= \frac{(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

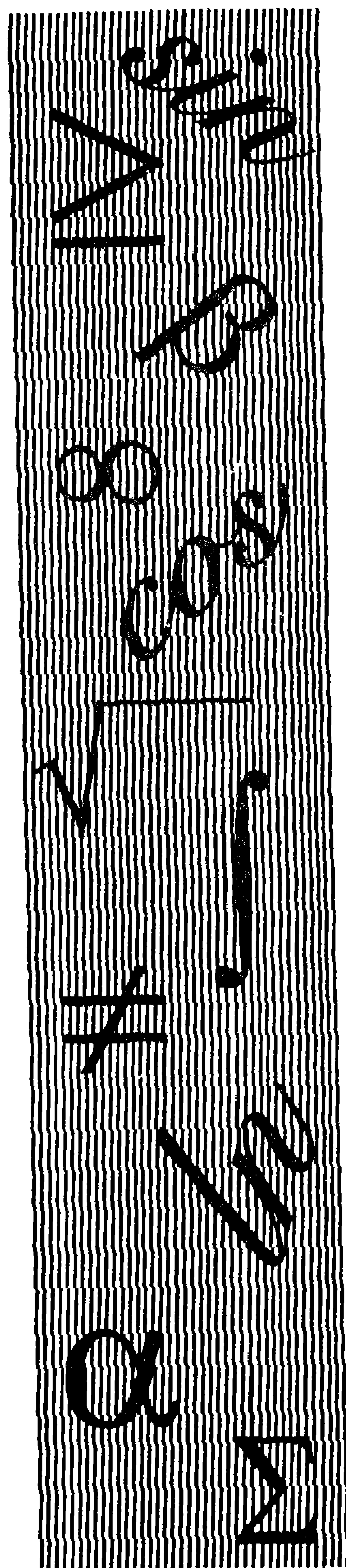
$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad .....(7)$$

بالتعويض عن $\tan u$ من (7) في (6) ، نجد ان :

$$I = \frac{1}{3a^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)^3 + C$$

$$= \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} + C \qquad .....(8)$$

من (8) و (1) يثبت صحة المطلوب .



ملحق (١)

علاقات مثلثية وعلاقات زائدية

أولاً: الدوال المثلثية والمثلثية العكسية

علاقات أساسية :

(1) $\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \qquad ; \forall u \in \Re$

(2) $1 + \tan^2 u = \sec^2 u \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

(3) $1 + \cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u \qquad ; u \neq n\pi$

قوانين ضعف الزاوية :

(4) $\sin 2u = 2 \sin u \cos u \qquad ; \forall u \in \Re$

(5) $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

(6) $= 2\cos^2 u - 1$

(7) $= 1 - 2\sin^2 u$

(8) $\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \qquad ; u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi ,\ u \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$

(9) $= \frac{2}{\cot u - \tan u}$

(10) $= \frac{1}{2}\left\{ \tan\left(\frac{\pi}{4} + u\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) \right\}$

(11) $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u} \qquad ; u \neq \frac{n\pi}{2}$

(12) $= \frac{\cot u - \tan u}{2}$

قوانين ثلاثة أمثال الزاوية :

(13) $\sin 3u = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$

(14) $\cos 3u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u$

(15) $\tan 3u = \frac{3 \tan u}{1 - 3\tan^2 u}$

قوانين نصف الزاوية :

يتوقف اختيار الإشارة على الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{u}{2}$

(16) $\sin\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$

(17) $\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$

(18) $\tan\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1+\cos u} \quad ; \; u \neq (2n+1)\pi$

(19) $= \frac{1-\cos u}{\sin u} \quad ; \; u \neq n\pi$

(20) $= \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \quad ; \; u \neq (2n+1)\pi$

الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين :

(21) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

(22) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

(23) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(24) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

(25) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$

(26) $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \; ; \\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \\ x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{array} \right.$$

حيث n , k , m أعداد صحيحة

قوانين تحويل حاصل ضرب دالتين إلى مجموع أو فرق :

(27) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$

(28) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)$

(29) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)$

(30) $\tan x \tan y = \dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$

(31) $= -\dfrac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}$

(32) $\cot x \cot y = \dfrac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y}$

(33) $= -\dfrac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y}$

(34) $\cot x \tan y = \dfrac{\cot x + \tan y}{\tan x + \cot y}$

(35) $= -\dfrac{\cot x - \tan y}{\tan x - \cot y}$

قوانين تحويل مجموع أو فرق دالتين إلى حاصل ضرب :

(36) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(37) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(38) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(39) $\cos x - \cos y = -2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :

(40) $\sin u = \cos(90^{\circ} - u)$

(41) $= \sqrt{1 - \cos^2 u}$

(42) $= 2\sin\dfrac{u}{2}\cos\dfrac{u}{2}$

(43) $= \dfrac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}}$

(44) $= \sqrt{\cos^2 u - \cos 2u}$

(45) $= \sqrt{\frac{1-\cos 2u}{2}}$

(46) $= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 u}}$

(47) $= \frac{2\tan(u/2)}{1+\tan^2(u/2)}$; $u \neq \pi + 2n\pi$

(48) $\cos u$ $= \sin(90^\circ - u)$

(49) $= \sqrt{1-\sin^2 u}$

(50) $= \cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}$

(51) $= \frac{\cot u}{\sqrt{1+\cot^2 u}}$

(52) $= 1 - 2\sin^2 \frac{u}{2}$

(53) $= \sqrt{\frac{1+\cos 2u}{2}}$

(54) $= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$

(55) $= \frac{1-\tan^2(u/2)}{1+\tan^2(u/2)}$; $u \neq \pi + 2n\pi$

(56) $\tan u$ $= \cot(90^\circ - u)$

(57) $= \frac{1}{\cot u}$

(58) $= \frac{\sin u}{\cos u}$

(59) $= \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}$

(60) $= \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 u} - 1}$

(61) $= \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$

(62) $= \dfrac{2\tan(u/2)}{1-\tan^2(u/2)}$; $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $u \neq \pi + 2n\pi$

(63) $\cot u$ $= \tan(90^\circ - u)$

(64) $= \dfrac{1}{\tan u}$

(65) $= \dfrac{\cos u}{\sin u}$

(66) $= \dfrac{\cos u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}$

(67) $= \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 u} - 1}$

(68) $= \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}$

(69) $= \dfrac{\cot^2(u/2) - 1}{2\cot(u/2)}$

(70) $= \dfrac{1-\tan^2(u/2)}{2\tan(u/2)}$; $u \neq n\pi$

صيغ الاختزال :

(71)

u	$\frac{\pi}{2} - u$	$\frac{\pi}{2} + u$	$\pi - u$	$\pi + u$	$\frac{3\pi}{2} - u$	$\frac{3\pi}{2} + u$	$2\pi - u$
$\sin u$	$\cos u$	$\cos u$	$\sin u$	$-\sin u$	$-\cos u$	$-\cos u$	$-\sin u$
$\cos u$	$\sin u$	$-\sin u$	$-\cos u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$\sin u$	$\cos u$
$\tan u$	$\cot u$	$-\cot u$	$-\tan u$	$\tan u$	$\cot u$	$-\cot u$	$-\tan u$
$\cot u$	$\tan u$	$-\tan u$	$-\cot u$	$\cot u$	$\tan u$	$-\tan u$	$-\cot u$

حلول المتباينات المثلثية البسيطة :

	المتباينة	الحل
(72)	$\sin x > a; \lvert a \rvert < 1$	$x \in (\sin^{-1} a + 2\pi n \;,\; \pi - \sin^{-1} a + 2\pi n)$
(73)	$\sin x < a; \lvert a \rvert < 1$	$x \in (-\pi - \sin^{-1} a + 2\pi n \;,\; \sin^{-1} a + 2\pi n)$
(74)	$\cos x > a; \lvert a \rvert < 1$	$x \in (-\cos^{-1} a + 2\pi n \;,\; \cos^{-1} a + 2\pi n)$
(75)	$\cos x < a; \lvert a \rvert < 1$	$x \in (\cos^{-1} a + 2\pi n \;,\; 2\pi - \cos^{-1} a + 2\pi n)$
(76)	$\tan x > a$	$x \in (\tan^{-1} a + \pi n \;,\; \pi/2 + \pi n)$
(77)	$\tan x < a$	$x \in (-\pi/2 + \pi n \;,\; \tan^{-1} a + \pi n)$
(78)	$\cot x > a$	$x \in (\pi n \;,\; \cot^{-1} a + \pi n)$
(79)	$\cot x < a$	$x \in (\cot^{-1} a + \pi n \;,\; \pi + \pi n)$

حلول المعادلات المثلثية البسيطة :

	المعادلة	الحل
(80)	$\sin x = a \;;\; \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^k \sin^{-1} a + \pi k$
(81)	$\cos x = a \;;\; \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \cos^{-1} a + 2\pi k$
(82)	$\tan x = a$	$x = \tan^{-1} a + \pi k$
(83)	$\cot x = a$	$x = \cot^{-1} a + \pi k$

الدوال المثلثية العكسية

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية العكسية :

(84) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \quad ; \; -1 \le x \le 1$

(85) $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} \quad ; \; 0 \le x \le 1$

(86) $= -\cos^{-1} \sqrt{1-x^2} \quad ; \; -1 \le x \le 0$

(87)		$= \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$; \ -1 < x < 1$
(88)		$= \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$; \ 0 < x \le 1$
(89)		$= \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi$	$; \ -1 \le x < 0$
(90)	$\cos^{-1}(-x)$	$= \pi - \cos^{-1} x$	$; \ -1 \le x \le 1$
(91)	$\cos^{-1} x$	$= \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$	$; \ 0 \le x \le 1$
(92)		$= \pi - \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$	$; \ -1 \le x \le 0$
(93)		$= \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$; \ 0 < x \le 1$
(94)		$= \pi + \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$; \ -1 \le x < 0$
(95)	$\tan^{-1}(-x)$	$= -\tan^{-1} x$	
(96)	$\tan^{-1} x$	$= \sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	
(97)		$= \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$; \ x > 0$
(98)		$= -\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$; \ x \le 0$
(99)		$= \cot^{-1} \dfrac{1}{x}$	$; \ x > 0$
(100)		$= \cot^{-1} \dfrac{1}{x} - \pi$	$; \ x < 0$
(101)	$\cot^{-1}(-x)$	$= \pi - \cot^{-1} x$	
(102)	$\cot^{-1} x$	$= \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$; \ x \ge 0$
(103)		$= \pi - \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$; \ x < 0$
(104)		$= \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$	$; \ x > 0$
(105)		$= \pi + \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$	$; \ x < 0$

صياغات مجموع أو فرق دالتين مثلثيتين عكسيتين :

(106) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y \quad =\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$

(107) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y \quad =\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$

(108) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y \quad =\cos^{-1}\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

(109) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y \quad =\cos^{-1}\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

(110) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y \quad =\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

(111) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y \quad =\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(112) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y \quad =\cot^{-1}\frac{xy-1}{y+x}$

(113) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y \quad =\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-x}$

حلول متباينات مثلثية عكسية بسيطة :

	المتباينة	الحل
(114)	$\sin^{-1}x>a \;;\; \lvert a\rvert<\pi/2$	$x\in(\sin a\,,1]$
(115)	$\sin^{-1}x<a \;;\; \lvert a\rvert\le\pi/2$	$x\in[-1\,,\sin a)$
(116)	$\cos^{-1}x>a \;;\; 0<a<\pi$	$x\in[-1\,,\cos a)$
(117)	$\cos^{-1}x<a \;;\; 0<a\le\pi$	$x\in(\cos a\,,1]$
(118)	$\tan^{-1}x>a \;;\; \lvert a\rvert<\pi/2$	$x\in(\tan a\,,+\infty)$
(119)	$\tan^{-1}x<a \;;\; \lvert a\rvert<\pi/2$	$x\in(-\infty\,,\tan a)$
(120)	$\cot^{-1}x>a \;;\; 0<a<\pi$	$x\in(-\infty\,,\cot a)$
(121)	$\cot^{-1}x<a \;;\; 0<a<\pi$	$x\in(\cot a\,,+\infty)$

حلول معادلات بسيطة تحتوي دوال مثلثية عكسية :

	المعادلة	الحل
(122)	$\sin^{-1} x = a \quad ; \quad \lvert a \rvert \le \pi/2$	$x = \sin a$
(123)	$\cos^{-1} x = a \quad ; \quad 0 \le a \le \pi$	$x = \cos a$
(124)	$\tan^{-1} x = a \quad ; \quad \lvert a \rvert < \pi/2$	$x = \tan a$
(125)	$\cot^{-1} x = a \quad ; \quad 0 < a < \pi$	$x = \cot a$

ثانيًا : الدوال الزائدية والزائدية العكسية

الدوال الزائدية :

يلاحظ أن x في مجموعة القوانين التالية مأخوذة بالتقدير الدائري.

(126) $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(127) $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(128) $$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(129) $$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(130) $$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(131) $$= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

(132) $$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

(133) $$\operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

علاقات أساسية :

(134)	$\cosh^2 x - \sinh^2 x$	$= 1$
(135)	$\tanh x$	$= \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
(136)	$\coth x$	$= \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$
(137)	$\text{sech}\, x$	$= \dfrac{1}{\cosh x}$
(138)	$\text{cosech}\, x$	$= \dfrac{1}{\sinh x}$
(139)	$\cosh x + \sinh x$	$= e^{x}$
(140)	$\cosh x - \sinh x$	$= e^{-x}$
(141)	$\tanh^2 x + \text{sech}^2 x$	$= 1$
(142)	$\coth^2 x - \text{cosech}^2 x$	$= 1$

العلاقات الأساسية بين الدوال الزائدية :

(143)	$\sinh x$	$= \sqrt{\cosh^2 x - 1}$
(144)		$= \dfrac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$
(145)		$= \dfrac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
(146)	$\cosh x$	$= \sqrt{\sinh^2 x - 1}$
(147)		$= \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$
(148)		$= \dfrac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$
(149)	$\tanh x$	$= \dfrac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$
(150)		$= \dfrac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$

$$(151)\qquad = \frac{1}{\cosh x}$$

$$(152)\qquad \coth x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$$

$$(153)\qquad = \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$$

$$(154)\qquad = \frac{1}{\tanh x}$$

قوانين الضعف لكمية :

$$(155)\qquad \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$

$$(156)\qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$(157)\qquad = 2\cosh^2 x - 1$$

$$(158)\qquad = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$(159)\qquad \tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$(160)\qquad \coth 2x = \frac{1}{2}\left(\coth x + \tanh x\right)$$

قوانين ثلاثة أمثال كمية :

$$(161)\qquad \sinh 3x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x$$

$$(162)\qquad \cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$$

$$(163)\qquad \tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh^2 x}$$

الدوال الزائدية لمجموع أو فرق كميتين :

$$(164)\qquad \sinh\left(x + y\right) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$(165)\qquad \sinh\left(x - y\right) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

$$(166)\qquad \cosh\left(x + y\right) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$(167)\qquad \cosh\left(x - y\right) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

(168) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(169) $\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

(170) $\coth(x+y) = \dfrac{\coth x \coth y + 1}{\coth x + \coth y}$

(171) $\coth(x-y) = \dfrac{\coth x \coth y - 1}{\coth x - \coth y}$

قوانين تحويل مجموع أو فرق دالتين إلى حاصل ضرب :

(172) $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

(173) $\sinh x - \sinh y = 2\cosh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$

(174) $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$

(175) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$

الدوال الزائدية العكسية :

(176) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$; $-\infty < x < +\infty$

(177) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$; $1 \le x < +\infty$

(178) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $|x| < 1$

(179) $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$; $|x| > 1$

(180) $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$; $0 < x < 1$

(181) $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$; لجميع قيم x

العلاقات الأساسية بين الدوال الزائدية العكسية :

(182) $\sinh^{-1} x = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2}$

(183) $= \tanh^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(184) $= \coth^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

(185) $\cosh^{-1} x = \sinh^{-1}\sqrt{x^2-1}$

(186) $= \tanh^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

(187) $= \coth^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(188) $\tanh^{-1} x = \sinh^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(189) $= \cosh^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(190) $= \coth^{-1}\dfrac{1}{x}$

(191) $\coth^{-1} x = \sinh^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(192) $= \cosh^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(193) $= \tanh^{-1}\dfrac{1}{x}$

صياغات مجموع أو فرق دالتين زائديتين عكسيتين :

(194) $\sinh^{-1} x + \sinh^{-1} y = \sinh^{-1}\left[x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\right]$

(195) $\sinh^{-1} x - \sinh^{-1} y = \sinh^{-1}\left[x\sqrt{y^2+1} - y\sqrt{x^2+1}\right]$

(196) $\cosh^{-1} x + \cosh^{-1} y = \cosh^{-1}\left[xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$

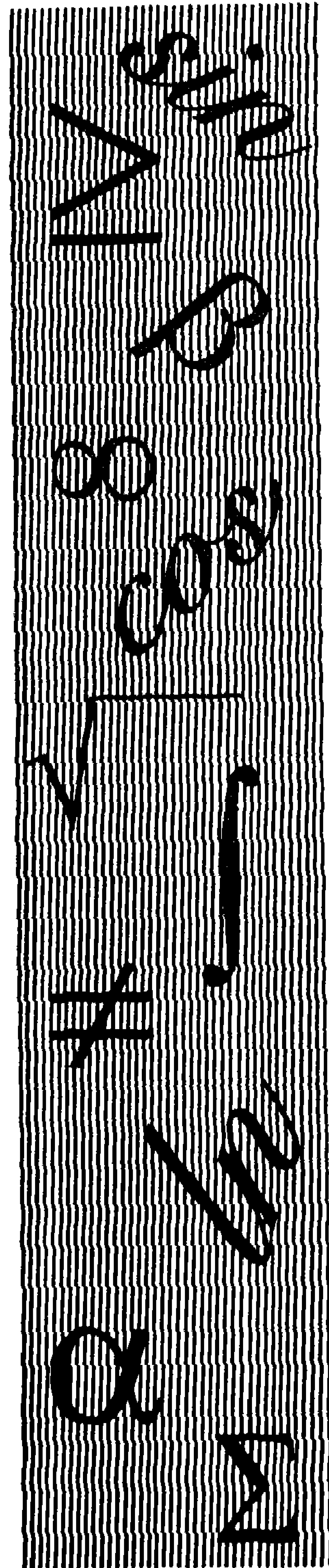
(197) $\cosh^{-1} x - \cosh^{-1} y = \cosh^{-1}\left[xy - \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$

$$(198)\qquad \tanh^{-1} x + \tanh^{-1} y = \tanh^{-1} \frac{x+y}{1+xy}$$

$$(199)\qquad \tanh^{-1} x - \tanh^{-1} y = \tanh^{-1} \frac{x-y}{1-xy}$$

$$(200)\qquad \coth^{-1} x + \coth^{-1} y = \coth^{-1} \frac{xy+1}{x+y}$$

$$(201)\qquad \coth^{-1} x - \coth^{-1} y = \coth^{-1} \frac{xy-1}{x-y}$$



ملحق (٢)

قواعد الاشتقاق

<u>في مجموعة الصياغات التالية :</u>

ثوابت (أعداد حقيقية).	a, b, c, r, k
دوال في متغير ما.	F, U, V, Y
الأساس الطبيعي للوغوريتمات.	e
عدد صحيح موجب (ما لم يذكر غير ذلك).	n
المشتقات الأولى للدوال F, U, V, Y	F', U', V', Y'
مجموعة الأعداد الحقيقية.	R

	$Y =$	$Y' =$
1	a	0
2	x	1
3	$ax+b$	a
4	x^n	$n\,x^{n-1}$ $\quad ; n \in R$
5	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$ $\quad ; n \in R$
6	$a\,U$	$a\,U'$
7	$aU_1 \pm bU_2 \pm \cdots \pm kU_m$	$aU'_1 \pm bU'_2 \pm \cdots \pm kU'_m$
8	U^n	$nU^{n-1}U'$
9	$U\,V$	$U\,V' + V\,U'$
10	$F\,U\,V$	$F'\,U\,V + F\,U'V + F\,U\,V'$
11	$Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n$	$Y\left\{\frac{Y'_1}{Y_1}+\frac{Y'_2}{Y_2}+\frac{Y'_3}{Y_3}+\cdots+\frac{Y'_n}{Y_n}\right\}$
12	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
13	$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
14	$\sqrt{U^n}$	$\frac{nU'}{2}\sqrt{U^{n-2}}$
15	$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - UV'}{V^2}$
16	$\ln x$	$\frac{1}{x}$ $\quad ; x>0 , x \neq 1$
17	$\ln U$	$\frac{U'}{U}$ $\quad ; U>0 , U \neq 1$
18	$\ln U^n$	$\frac{nU'}{U}$ $\quad ; U>0 , U \neq 1$
19	$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$ $\quad ; x>0 \ , \ a>0 \ ; \ a \neq 1$

	$Y=$	$Y'=$
20	$\log_a U$	$\dfrac{U'\log_a e}{U}$; $U>0$, $a>0$, $a\neq 1$
21	e^x	e^x
22	e^U	$U'e^U$
23	a^x	$a^x \ln a$; $a>0$, $a\neq 1$
24	a^U	$U'a^U \ln a$; $a>0$, $a\neq 1$
25	$\sin x$	$\cos x$
26	$\sin U$	$U'\cos U$
27	$\sin U^n$	$nU'U^{n-1}\cos U^n$
28	$\sin^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\sin^{m-1}U^n\cos U^n$
29	$\cos x$	$-\sin x$
30	$\cos U$	$-U'\sin U$
31	$\cos U^n$	$-nU'U^{n-1}\sin U^n$
32	$\cos^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\cos^{m-1}U^n\sin U^n$
33	$\tan x$	$\sec^2 x$; $(x\neq(\pi/2)+n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$
34	$\tan U$	$U'\sec^2 U$
35	$\tan U^n$	$nU'U^{n-1}\sec^2 U^n$
36	$\tan^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\tan^{m-1}U^n\sec^2 U^n$
37	$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$; $(x\neq n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$
38	$\cot U$	$-U'\mathrm{cosec}^2 U$
39	$\cot U^n$	$-nU'U^{n-1}\mathrm{cosec}^2 U^n$
40	$\cot^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\cot^{m-1}U^n\mathrm{cosec}^2 U^n$
41	$\sec x$	$\sec x\tan x$
42	$\sec U$	$U'\sec U\tan U$
43	$\sec U^n$	$nU'U^{n-1}\sec U^n\tan U^n$

	$Y =$	$Y' =$
44	$\sec^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\sec^m U^n \tan U^n$
45	$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
46	$\operatorname{cosec} U$	$-U'\operatorname{cosec} U \cot U$
47	$\operatorname{cosec} U^n$	$-nU'U^{n-1}\operatorname{cosec} U^n \cot U^n$
48	$\operatorname{cosec}^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\operatorname{cosec}^m U^n \cot U^n$
49	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$
50	$\sin^{-1} U$	$\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
51	$\sin^{-1} U^n$	$\frac{nU'U^{n-1}}{\sqrt{1-U^{2n}}}$
52	$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$
53	$\cos^{-1} U$	$\frac{-U'}{\sqrt{1-U^2}}$
54	$\cos^{-1} U^n$	$\frac{-nU'U^{n-1}}{\sqrt{1-U^{2n}}}$
55	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
56	$\tan^{-1} U$	$\frac{U'}{1+U^2}$
57	$\tan^{-1} U^n$	$\frac{nU'U^{n-1}}{1+U^{2n}}$
58	$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
59	$\cot^{-1} U$	$\frac{-U'}{1+U^2}$
60	$\cot^{-1} U^n$	$\frac{-nU'U^{n-1}}{1+U^{2n}}$

	$Y =$	$Y' =$
61	$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
62	$\sec^{-1} U$	$\frac{U'}{U\sqrt{U^2-1}}$
63	$\sec^{-1} U^n$	$\frac{nU'}{U\sqrt{U^{2n}-1}}$
64	$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
65	$\operatorname{cosec}^{-1} U$	$\frac{-U'}{U\sqrt{U^2-1}}$
66	$\operatorname{cosec}^{-1} U^n$	$\frac{-nU'}{U\sqrt{U^{2n}-1}}$
67	$\sinh x$	$\cosh x$
68	$\sinh U$	$U'\cosh U$
69	$\sinh U^n$	$nU'U^{n-1}\cosh U^n$
70	$\sinh^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\sinh^{m-1} U^n \cosh U^n$
71	$\cosh x$	$\sinh x$
72	$\cosh U$	$U'\sinh U$
73	$\cosh U^n$	$nU'U^{n-1}\sinh U^n$
74	$\cosh^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\cosh^{m-1} U^n \sinh U^n$
75	$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
76	$\tanh U$	$U'\operatorname{sech}^2 U$
77	$\tanh U^n$	$nU'U^{n-1}\operatorname{sech}^2 U^n$
78	$\tanh^m U^n$	$mnU'U^{n-1}\tanh^{m-1} U^n \operatorname{sech}^2 U^n$
79	$\coth x$	$-\operatorname{cosech}^2 x \quad ; x \neq 0$
80	$\coth U$	$-U'\operatorname{cosech}^2 U$

	$Y =$	$Y' =$
81	$\coth U^n$	$-nU'U^{n-1}\operatorname{cosech}^2 U^n$
82	$\coth^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\coth^{m-1} U^n \operatorname{cosech}^2 U^n$
83	$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
84	$\operatorname{sech} U$	$-U'\operatorname{sech} U \tanh U$
85	$\operatorname{sech} U^n$	$-nU'U^{n-1}\operatorname{sech} U^n \tanh U^n$
86	$\operatorname{sech}^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\operatorname{sech}^m U^n \tanh U^n$
87	$\operatorname{cosech} x$	$-\operatorname{cosech} x \coth x$
88	$\operatorname{cosech} U$	$-U'\operatorname{cosech} U \coth U$
89	$\operatorname{cosech} U^n$	$-nU'U^{n-1}\operatorname{cosech} U^n \coth U^n$
90	$\operatorname{cosech}^m U^n$	$-mnU'U^{n-1}\operatorname{cosech}^m U^n \coth U^n$
91	$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
92	$\sinh^{-1} U$	$\frac{U'}{\sqrt{1+U^2}}$
93	$\sinh^{-1} U^n$	$\frac{nU'U^{n-1}}{\sqrt{1+U^{2n}}}$
94	$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $x > 1$
95	$\cosh^{-1} U$	$\frac{U'}{\sqrt{U^2-1}}$
96	$\cosh^{-1} U^n$	$\frac{nU'U^{n-1}}{\sqrt{U^{2n}-1}}$
97	$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$; $\lvert x \rvert < 1$
98	$\tanh^{-1} U$	$\frac{U'}{1-U^2}$
99	$\tanh^{-1} U^n$	$\frac{nU'U^{n-1}}{1-U^{2n}}$

	Y =	Y' =
100	$\coth^{-1} x$	$\frac{-1}{x^2-1}$; $\lvert x \rvert > 1$
101	$\coth^{-1} U$	$\frac{-U'}{U^2-1}$
102	$\coth^{-1} U^n$	$\frac{-nU'U^{n-1}}{U^{2n}-1}$
103	$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$; $1 > x > 0$
104	$\operatorname{sech}^{-1} U$	$\frac{-U'}{U\sqrt{1-U^2}}$
105	$\operatorname{sech}^{-1} U^n$	$\frac{-nU'}{U\sqrt{1-U^{2n}}}$
106	$\operatorname{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\forall x \in R$
107	$\operatorname{cosech}^{-1} U$	$\frac{-U'}{U\sqrt{U^2+1}}$
108	$\operatorname{cosech}^{-1} U^n$	$\frac{-nU'}{U\sqrt{U^{2n}+1}}$

مطابع الدار الهندسية/القاهرة
تليفاكس ٣٥٤٠٢٥٩٨ محمول ٠١٢٢٢٣٤٩٠١١

هذا الكتاب

الرياضيات سواء أحببناها أو كرهناها ، سواء عشقناها أو بغضناها فهي أولاً وأخيرًا (الملكة)، ملكة العلوم جميعها، ولأن للملكة تاج، فإن (علم التفاضل والتكامل) هو تاج هذه الملكة، ليكون (التكامل) هو لؤلؤة هذا التاج. ولأن التكامل كما يُجمع الكثيرون سواء من عُشاق الرياضيات او كارهوها، على انه من أصعب فروع الرياضيات عامة، فكان هذا الكتاب الذي بين يديك -عزيزي القارئ- وهو محاولة متواضعة وغير مسبوقة لتقديم الحل لعدد ٢٥٢ حالة عامة من مسائل التكامل، ولقد روعي عرض المادة الرياضياتية في الكتاب بأسلوب يتيح للقارئ تتبع خطوات الحل في معنى واضح بعيد عن الغموض، ولقد تطلب ذلك تبسيط وتحليل كل حل مع ذكر كافة المفاهيم والمتطابقات والقوانين المستخدمة في كل حل على حدة دون إخلال بدقة الحل.

المؤلف

